السلسلة الفضّية



الأستاذ نور الدين عيساوي
بالتعاون مع فريق عكاشة

الرياضيات من الألف إلى الياء

الشعب الأدبية واللغات

موافقة لفيديوهات اليوتيوب YouTube

- ملخص شامل خاص بكل وحدة
- تمارين مقترحة مهمة جدا
- جميع مواضيع الدوال 2008-2019
- جميع مواضيع المتتاليات 2008-2019
- جميع مواضيع القسمة في Z 2008-2019

التحضير الجيد لبكالوريا الجزائر

عكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

باك 2021 عنواننا للنجاح
BAC 2021

مكتبة عكاشة للنشر والتوزيع

السلسلة الفضية

الأستاذ نور الدين عيساوي
بالتعاون مع فريق عكاشة

الرياضيات من الألف إلى الياء

موافقة لفيديوهات اليوتيوب

ملخص شامل خاص بكل وحدة

تمارين مقترحة مهمة جدا

جميع مواضيع الدوال 2008-2019

جميع مواضيع المتتاليات 2008-2019

جميع مواضيع القسمة في Z 2008-2019

التحضير الجيد لبكالوريا الجزائر

باك 2021 عنواننا للنجاح
BAC 2021

عكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

بطاقة الكتاب

العنوان: الرياضيات من الألف إلى الياء - السلسلة الفضية-
الشعبة: الشعب الأدبية
السنة: الثالثة ثانوي - البكالوريا -
المؤلف: الأستاذ نور الدين عيساوي بالتعاون مع فريق عكاشة
الإصدار: الأول 2019-2020

دار النشر: مكتبة عكاشة للنشر والتوزيع
العنوان: 03 شارع الملعب أولاد فايت الجزائر العاصمة - الجزائر
ردمك: 1-85-723-9931-978
الإيداع القانوني: مارس 2020
الطبعة: مارس 2020
السعر: 350 دج

كلمة فريق عكاشة

عندما كنا صغارا أحببنا المطر فكنا نلعب تحته ونستمتع به،
وعندما كبرنا أحببنا العلم فجمعنا شملنا لأجله، وعقدنا العزم على تسخير أنفسنا له.

الأستاذ نور الدين عيساوي الذي غرس الأمل والحماس في قلوب مئات الآلاف من التلاميذ والأساتذة في ثانويات وطننا العربي عامة وفي الجزائر خاصة، فصارت الرياضيات مادة ممتعة جدا وسهلة الوصول إليها، بواسطة فيديوهات مبسطة ورائعة جدا.

السلسلة الفضية هي سلسلة جامعة في مادتها، تساعد التلميذ على توحيد مصدره وجمع كل ما يحتاجه في كتاب واحد، تحوي ملخصا شاملا خاصا بكل وحدة مرفقة بتمارين شاملة ومهمة جدا يأتي بعدها حلول جميع مواضيع البكالوريا للشعب الأدبية، وعلاوة على كل هذا فللكتاب خاصية فريدة من نوعها وهي موافقتها لفيديوهات اليوتيوب فبواسطتها يمكنك التوسع في الشرح أو الزيادة في الفهم بواسطة الفيديوهات المتوفرة مجانا على قناة الأستاذ نورالدين.

إلى كل من يقرأ هذا الكتاب، نسأل الله لك التوفيق والنجاح، وتعلمك أنه يمكنك المساهمة في تطوير النسخة القادمة بإرسال ملاحظاتك أو اقتراحاتك. ولا تنسوا الترحم على أم أستاذنا الغالي نورالدين عيساوي.

يمكنك أن تشارك في قناة الأستاذ نورالدين في اليوتيوب لكي يصلك كل جديد

مع تحيات الأستاذ نور الدين وفريق عكاشة

جدول المحتويات:

مع تحيات الاستاذ نور الدين
وفريق عكاشة

عكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

محور الدوال

تذكير حول المعادلات

إشارة $ax+b$

مبرهنة: a، b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

إشارة ax^2+bx+c

لدراسة إشارة ax^2+bx+c نتبع الخطوات التالية:

1- نحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ باستعمال المميز Δ

2- نعين الجذور إن وجدت $(\Delta \geq 0)$ ثم نستنتج الإشارة

مبرهنة:

a، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$

لدراسة إشارة ax^2+bx+c نحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ بحساب المميز Δ ونميز ثلاث حالات وذلك حسب إشارة المميز Δ

$$\Delta = b^2-4ac$$

• **الحالة الأولى $\Delta < 0$**

ليس للمعادلة جذورا ولدينا

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	

• **الحالة الثانية $\Delta = 0$**

للمعادلة جذرا مضاعفا $x_0=-\frac{b}{2a}$ ولدينا

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة a

• **الحالة الثالثة $\Delta > 0$**

للمعادلة جذران متمايزان

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

بفرض $x_1 < x_2$ لدينا:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
المعادلة	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a

ملخص شامل حول الدوال

دالة عددية لمتغير حقيقي

- **تعريف:**

ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$

تسمى f دالة عددية معرفة على D ، كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$ نرمز له بالرمز $f(x)$

- **اصطلاحا:**

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f
- ليكن x عنصرا من D بحيث $y=f(x)$

← y يسمى **صورة** x بالدالة f

← العنصر x يسمى **سابقة العنصر** y

← الدالة f تسمى كذلك **دالة لمتغير حقيقي** x

مجموعة تعريف دالة

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x

- **مجموعة تعريف الدالة f**: هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجودة أي قابلة للحساب ويرمز لها بالرمز D_f يعنى $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$

تساوي دالتين

- **تعريف:**

القول عن دالتين f و g أنهما متساويان يعني أن لهما نفس مجموعة التعريف D وأن من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا:

$$f(x)=g(x)$$

ونكتب:

$$f=g$$

العمليات الجبرية

العملية	التعريف	مجموعة التعريف
$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$	D_f
$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
λf	$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$	D_f
$f \times g$	$(f \times g)(x)=f(x)\times g(x)$	$D_f \cap D_g$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g$ $g(x) \neq 0$

نهايات الدوال المرجعية

- $\lim\limits_{x\to-\infty} ax+b=-\infty$ عندما يكون a عدد سالب تماما
- $\lim\limits_{x\to+\infty} ax+b=+\infty$ عندما يكون a عدد موجب تماما
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0^-$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0^+$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{1}{x}=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x}=+\infty$

نهاية دالة كثيرة الحدود

نهاية دالة كثيرة الحدود عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية الحد الأكبر درجة مثال:

$$\lim_{x\to+\infty} ax^3+bx^2+cx+d=\lim_{x\to+\infty} ax^3$$

(حيث $a\neq 0$)

نهاية دالة ناطقة

نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية (الحد الأكبر درجة في المقام على الحد الأكبر درجة في البسط) مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+1}{bx+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{bx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{b}$$

(حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$)

المستقيمات المقاربة (التفسير الهندسي للنهايات)

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$: المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مقارب عمودي لـ (C_f)

$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$: المستقيم ذو المعادلة $y=b$ مقارب أفقي لـ (C_f)

مشتقات الدوال المألوفة

مجال الاشتقاق	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	a
$\mathbb{R}$	a	$ax+b$
$\mathbb{R}$	$2x$	x^2
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$x^n \quad ,n\in\mathbb{N}$
$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$

العمليات على الدوال المشتق

f'	f
$k.u'$	$k.u$
$u'+v'$	$u+v$
$u'.v+u.v'$	$u.v$
$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$
$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$

اتجاه تغير الدالة

نعين الدالة المشتقة $f'(x)$ من أجل كل x من D_f ثم ندرس اشارتها

- إذا كان $f'(x)>0$ من أجل كل x من D_f فإن الدالة f متزايدة تماما.
- إذا كان $f'(x)<0$ من أجل كل x من D_f فإن الدالة f الدالة متناقصة تماما.
- إذا كان $f'(x)=0$ من أجل كل x من D_f الدالة ثابتة.

القيمة الحدية الصغرى والعظمى

إذا انعدمت f' عند القيمة x_0 ثم غيرت اشارتها فإن القيم الحدية لـ f كالآتي:

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
	لـ f قيمة حدية عظمى عند القيمة x_0		

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
	لـ f قيمة حدية صغرى عند القيمة x_0		

نقطة الانعطاف

ط1- $f'(x)$ تنعدم عند القيمة x_0 ولا تغير إشارتها.

ط2- $f''(x)$ تنعدم عند القيمة x_0 وتغير اشارتها.

ط3- المماس (T) يخترق (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

الشفعية والتناظر

الدالة f معرفة على D_f و D_f متناظر:

السؤال	طريقة الإجابة عنه
بين أن النقطة $\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)	يكفي أن نبين أن $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$
بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$ محور تناظر لـ (C_f)	يكفي أن نبين أن $f(2\alpha-x)=f(x)$
بين أن الدالة f زوجية ((C_f) يقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر)	من قانون مركز التناظر $f(-x)+f(x)=0$
بين أن الدالة f فردية ((C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر)	من قانون محور التناظر $f(-x)-f(x)=0$

- معادلة المماس لمنحنى

معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0

$$(T):\quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

نقاط تقاطع مع المحاول

❖ محور الفواصل

المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل أي $y=0$

- لإيجاد x نحل المعادلة $f(x)=0$

❖ محور التراتيب

المنحنى (C_f) يقطع محور التراتيب أي $x=0$

- لإيجاد y نحسب $f(0)$

وضعية منحنى بالنسبة لمستقيم

لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ندرس الفرق $f(x)-y$

- إذا كان $f(x)-y>0$ فإن المنحى (C_f) فوق المستقيم (Δ)
- إذا كان $f(x)-y<0$ فإن المنحى (C_f) تحت المستقيم (Δ)
- إذا كان $f(x)-y=0$ فإن المنحى (C_f) يقطع المستقيم (Δ)

تمرين تدريبي 1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$

1- عين الدالة المشتقة للدالة f

2- اكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0

الحل: 1- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ وتبيانا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-1(2x+3)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

2- معادلة (Δ) هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$y=f'(0)x+f(0)$$

بما أن $f(0)=\frac{2(0)+3}{0+1}=3$ و $f'(0)=\frac{-1}{(0+1)^2}=-1$

فإن $(\Delta)\ y=-x+3$

تمرين تدريبي 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=x^3+3x^2+1$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها

3- شكل جدول تغيرات الدالة f

الحل:

1- النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$$

2- المشتقة: $f'(x)=(x^3+3x^2+1)'$

$$=3x^2+6x$$

- دراسة إشارة المشتقة :

نقوم بحل المعادلة من الدرجة الثانية: $3x^2+6x=0$

نحسب المميز Δ: $\Delta=b^2-4ac$

$$\Delta=36-4(3)(0)=36$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{36}=6$$

للمعادلة حلان متمايزان:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{12}{6}=-2$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{0}{6}=0$$

جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3- اتجاه التغير :

f متزايدة على المجال $]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$

f متناقصة على المجال $]-2;0[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

1- تمرين مقترح وهام جدا 01

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة التالية :

$$f(x)=-x^3+3x+2$$

(C_f) منحناها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب $f(1)$ ، $f(0)$ و $f(-1)$

2- احسب النهايات $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3- احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها

4- استنتج تغيرات الدالة f

5- شكل جدول تغيرات الدالة f

6- برهن أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف، عينها

7- اثبت أن النقطة $A(0;2)$ مركز تناظر لـ(C_f)

8- برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') عند نقطتين معامل توجيه كل منهما يساوي (-6)

9- عين احداثيات تلك النقطتين

10- اكتب معادلة المماس (Δ) عند الفاصلة 0

11- ادرس وضعية(C_f) بالنسبة لـ(Δ)

12- برهن أن $f(x)=(x+1)^2(-x+2)$

13- حل المعادلة $f(x)=0$

14- استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع حور الفواصل

15- ارسم المماس (Δ) ثم المنحنى (C_f)

الحل

1- حساب $f(1)$

$$f(1)=-(1)^3+3(1)+2$$
$$=-1+3+2$$
$$f(1)=4$$

$$f(0)=-(0)^3+3(0)+2$$
$$=0+0+2$$
$$f(0)=2$$

$$f(-1)=-(-1)^3+3(-1)+2$$
$$=1-3+2=0$$
$$f(-1)=0$$

2-حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=-(-\infty)^3=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x^3)=-(+\infty)^3=-\infty$$

3- حساب $f'(x)$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على D_f

$$f'(x)=(-x^3+3x+2)'=-3x^2+3$$

إشارة المشتقة

ندرس إشارة العبارة $-3x^2+3$

نقوم بحل المعادلة

$$-3x^2+3=0$$
$$-3x^2=-3$$
$$x^2=\frac{-3}{-3}$$
$$x^2=1$$

للمعادلة حلان

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{1} = 1 \\ \text{أو} \\ x_2 = -\sqrt{1} = -1 \end{cases}$$

ومنه إشارة العبارة تكون

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4- استنتاج اتجاه تغير الدالة f

f متناقصة على المجال $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

f متزايدة على المجال $[-1;1]$

5- تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

5- البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

لكي يكون لـ (C_f) نقطة انعطاف يجب أن
- تنعدم المشتقة الثانية $f''(x)$ وتغير اشارتها

لدينا $f'(x)$ قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة

$$f''(x) = (-3x^2+3)'$$
$$= -6x$$

نحل المعادلة $f''(x) = 0$

$$-6x = 0$$
$$x = 0$$

نشكل جدول إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

من جدول إشارة $f''(x)$ المشتقة الثانية تنعدم عند $x=0$ وتغير اشارتها

ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $(0; f(0))$

$$f(0) = 2$$

ومنه $A(0;2)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

7- اثبات أن النقطة $A(0;2)$ مركز تناظر لـ (C_f)

لدينا من قانون مركز التناظر إذا كانت النقطة $\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) فإن :

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

لدينا $A(0;2)$ ومنه

$$f(2(0)-x) + f(x) = f(-x) + f(x)$$
$$= (-(-x)^3 + 3(-x) + 2) + (-x^3 + 3x + 2)$$
$$= x^3 - 3x + 2 - x^3 + 3x + 2$$
$$= 4$$

ومنه النقطة $A(0;2)$ مركز تناظر لـ (C_f)

8- البرهان أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي -6

معامل توجيه كل منهما يساوي -6 يعني $f'(x) = -6$

نحل المعادلة

$$-3x^2 + 3 = -6$$
$$-3x^2 = -9$$

$$x^2 = \frac{-9}{-3} = 3$$

للمعادلة حلين هما

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ \text{أو} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

ومنه (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي -6

9- تعيين احداثيات النقطتين

$$f(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} + 2 = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2$$
$$f(\sqrt{3}) = 2$$
$$H(\sqrt{3};2)$$
$$f(-\sqrt{3}) = -(-\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} + 2$$
$$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2$$
$$f(-\sqrt{3}) = 2$$
$$H(-\sqrt{3};2)$$

10- معادلة المماس (Δ) عند $x=0$

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$f'(0) = 3$$
$$f(0) = 2$$
$$y = 3(x-0) + 2$$
$$y = 3x + 2$$

11- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = (-x^3 + 3x + 2) - (3x + 2)$$
$$f(x) - y = -x^3$$

ندرس إشارة $(-x^3)$

إشارة x^3 هي نفس إشارة x ومنه إشارة $-x^3$ هي نفس إشارة $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^3$		$+$	0	$-$	

ومنه:

(C_f) فوق (Δ) على المجال $]-\infty;0[$

(C_f) تحت (Δ) على المجال $]0;+\infty[$

(C_f) يتقاطع مع (Δ) عند $x=0$

12- البرهان أن $f(x) = (x+1)^2(-x+2)$

نقوم بنشر وتبسيط العبارة

$$(x+1)^2(-x+2) = (x^2+2x+1)(-x+2)$$
$$= -x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 + 4x + 2$$
$$= -x^3 + 3x + 2$$
$$= f(x)$$

13- حل المعادلة $f(x) = 0$

حل المعادلة $f(x) = 0$ يكافئ حل المعادلة

$$(x+1)^2(-x+2) = 0$$

ومنه

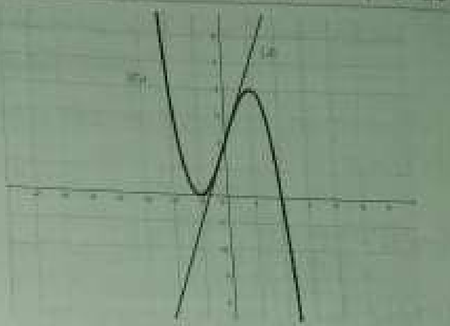
$$\begin{cases} (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ \text{أو} \\ -x+2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

ومنه حلول المعادلة هي $S\{-1;2\}$

14- استنتاج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

من السؤال السابق نستنتج أن نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل هي: $B(-1;0)$ $C(2;0)$

15- رسم المماس (Δ) ثم المنحنى (C_f)



2- تمرين مقترح و هام جدا 02

نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2- ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها

4- تحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1)$$

5- استنتج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

6- اكتب معادلة المماس(Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$

7- انشئ(C_f) و (Δ) في المعلم السابق

الحل

1- تعيين النهايات

عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 3x^2 + 1 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 3x^2 + 1 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

2- دراسة تغيرات f

- المشتقة $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 + 1)' = 6x^2 - 6x$$

-إشارة المشتقة

نحل المعادلة

$$6x^2 - 6x = 0$$
$$6x(x-1) = 0$$

ومنه للمعادلة حلين هما

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ \text{و} \\ 6x = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

إشارة المشتقة

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- اتجاه التغير

f متزايدة على المجال $]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$

f متناقصة على المجال $[0;1]$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

3- اثبات أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

لكي يكون لـ (C_f) نقطة انعطاف يجب أن

- تنعدم المشتقة الثانية $f''(x)$ وتغير اشارتها عند تلك النقطة

لدينا $f'(x)$ قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة

$$f''(x) = (6x^2 - 6x)' = 12x - 6$$

نحل المعادلة $f''(x)$ أي

$$12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

من جدول الإشارة نجد أن $f''(x)$ تنعدم عند النقطة $A\left(\frac{1}{2};f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ وتغير اشارتها

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

4- التحقق أن $f(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1)$

نقوم بنشر العبارة

$$\begin{aligned}(x-1)(2x^2 - x - 1) &= 2x^3 - x^2 - x - 2x^2 + x + 1 \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

5- استنتاج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

$$y = 0$$

نقوم بحل المعادلة $f(x) = 0$ أي

$$(x-1)(2x^2 - x - 1) = 0$$

إما

$$(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

أو

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

ومنه

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9$$

$x_1 = \frac{1-3}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

$x_2 = \frac{1+3}{4} = \boxed{1}$

وعليه: $f(1) = 0 \quad ; \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

ومنه نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل هي

$$\left\{(1;0), \left(-\frac{1}{2};0\right)\right\}$$

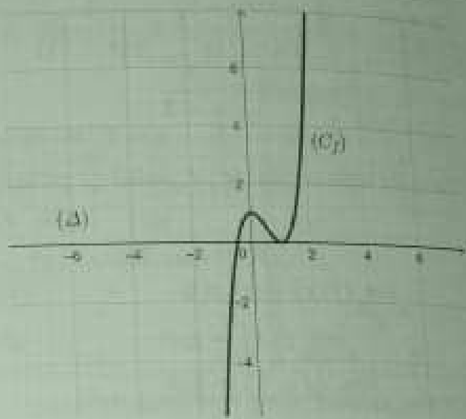
-6 معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$

$$\Delta \ : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

لدينا
$$f'(1) = 0$$
$$f(1) = 0$$

ومنه
$$\Delta \ : y = 0$$

-7 رسم (C_f) و (Δ)



-3 تمرين مقترح وهام جدا 03

f دالة معرفة على $]-\infty;-4[\cup]-4;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{-2x+3}{x+4}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j})$

-1 أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ و (-4) ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا.

-2 أحسب $f'(x)$ واستنتج إشارتها .

-3 شكل جدول تغيرات الدالة f

-4 أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 0.

-5 عين نقطة تقاطع (C_f) مع حاملي المحورين.

-6 أرسم (Δ) و (C_f).

الحل

-1 حساب نهايات الدالة f

- عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x+3}{x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

- عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+3}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

التفسير الهندسي:
$y = -2$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f)

- عند -4

$$\lim_{\substack{x\to-4 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-4 \\ <}} \frac{-2x+3}{x+4} = \frac{-2(-4)+3}{-4+4} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-4 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-4 \\ >}} \frac{-2x+3}{x+4} = \frac{-2(-4)+3}{-4+4} = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي للنهاية

المستقيم ذو المعادلة $x = -4$ مستقيم مقارب شاقولي لـ (C_f)

-2 حساب $f'(x)$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-4;+\infty[$ و $]-\infty;-4[$
ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = \left(\frac{-2x+3}{x+4}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x-8+2x-3}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-11}{(x+4)^2}$$

لدينا $-11 < 0$ و $(x+4)^2 > 0$ ومنه $\frac{-11}{(x+4)^2} < 0$

ومنه $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على D_f

-3 تشكيل جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2

-4 كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A

لدينا A النقطة ذات الفاصلة 0 ومنه معادلة المماس (Δ) تكون:

$$(\Delta) \quad y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

لدينا : $f'(0) = \frac{-11}{(0+4)^2} = -\frac{11}{16}$

و $f(0) = \frac{-2(0)+3}{0+4} = \frac{3}{4}$

بالتعويض في معادلة المماس

$$(\Delta)\quad y=-\frac{11}{16}(x-0)+\frac{3}{4}$$

$$\boxed{(\Delta)\quad y=-\frac{11}{16}x+\frac{3}{4}}$$

5- تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حاملي المحورين.

1- التقاطع مع محور الفواصل أي $y=0$

نحل المعادلة $f(x)=0$ أي:

$$\frac{-2x+3}{x+4}=0$$

ومنه $-2x+3=0$

ومنه $-2x=-3$

أي $x=\frac{3}{2}$

ومنه (C_f) يتقاطع مع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{3}{2};0\right)$

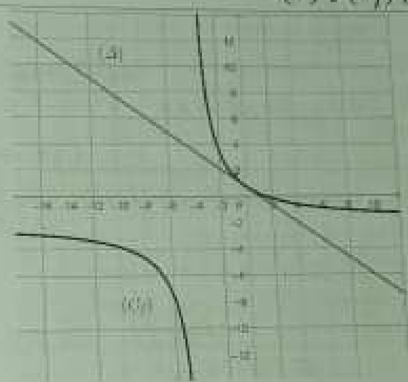
2- التقاطع مع محور التراتيب أي $x=0$

نعوض 0 في الدالة f

$$f(0)=\frac{-2(0)+3}{0+4}=\frac{3}{4}$$

ومنه (C_f) يتقاطع مع محور التراتيب في النقطة $B\left(0;\frac{3}{4}\right)$

6- رسم (C_f) و (Δ)



4- تمرين مقترح وهام جدا 04

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x)=\frac{x^2-8x+16}{x-3}$$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c بحيث من أجل كل x من D_f:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

2- استنتج أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ وعند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له، ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

-ادرس تغيرات الدالة f

3- جد إحداثيي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين، وأثبت أنها مركز تناظر للمنحنى (C_f).

4- أرسم المنحنى (C_f).

الحل

1- إيجاد الأعداد الحقيقية $c;b;a$:

تعيين D_f:

لتكون f معرفة يجب ألا ينعدم المقام، أي: $x-3\neq 0$

ومنه

$$x-3\neq 0$$

أي $x\neq 3$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

لدينا: $f(x)=\frac{x^2-8x+16}{x-3}$

نستعمل القسمة الإقليدية:

$x^2-8x+16$	$x-3$
$-x^2+3x$	$x-5$
$-5x+16$	
$5x-15$	
1	

ومنه

$$x^2-8x+16=(x-3)(x-5)+1$$

$$\frac{x^2-8x+16}{((x-3))}=\frac{(x-3)(x-5)}{((x-3))}+\frac{1}{((x-3))}$$

$$=x-5+\frac{1}{x-3}$$

بالمطابقة نجد: $a=1\quad b=-5\quad c=1$

2- استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$:

ليكون (Δ) م م مائلا يجب أن يكون:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y)=0$$

بما أن $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$

و $\lim_{x\to\pm\infty}(x-5)=\pm\infty$

و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-3}=0$

فإن: $y=x-5$ م م مائل لـ (C_f) بجوار: $\pm\infty$

دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=\frac{1}{x-3}$

لدينا $1>0$

إذن إشارة الفرق من إشارة المقام: $(x-3)$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$
$\frac{1}{x-3}$	$-$	||	$+$
الوضعية	(Δ) تحت (C_f)	||	(Δ) فوق (C_f)

- دراسة تغيرات الدالة f:

النهايات:

$$\lim_{\substack{x\to3\\<}}\left(x-5+\frac{1}{x-3}\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\>}}\left(x-5+\frac{1}{x-3}\right)=+\infty$$

لأن: $\lim_{\substack{x\to a\\<}}\frac{1}{x-a}=-\infty$ و $\lim_{\substack{x\to a\\>}}\frac{1}{x-a}=+\infty$

المشتقة:

f معرفة وقابلة للاشتقاق على D_f

$$f'(x) = \frac{(2x-8)(x-3)-(x^2-8x+16)}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{2x^2-6x-8x+24-x^2+8x-16}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

ندرس إشارة f' :

لدينا المقام: $(x-3)^2 > 0$

إذن إشارتها من إشارة البسط: (x^2-6x+8)

$x^2-6x+8=0$

معادلة من الدرجة الثانية تحل باستخدام المميز Δ

$$\Delta = 36-4(1)(8) = 4 > 0$$
$$x_1 = \frac{6-2}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
x^2-6x+8		+	0	−	‖	−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

الدالة f متزايدة على $]-\infty;2] \cup [4;+\infty[$

ومتناقصة على $[2;3[\cup]3;4]$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

3- إيجاد إحداثيي ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين، وإثبات أنها مركز تناظر المنحنى

المستقيمين المقاربين ذا المعادلتين

$x=3$ و $y=x-5$

عندما يتقاطع المستقيمان يكون

$y = 3-5 = -2$

ومنه إحداثيات ω : $\omega\ (3;-2)$

البرهان أنها مركز تناظر:

لتكون $\omega\ (\alpha;\beta)$ مركز تناظر يجب أن يكون:

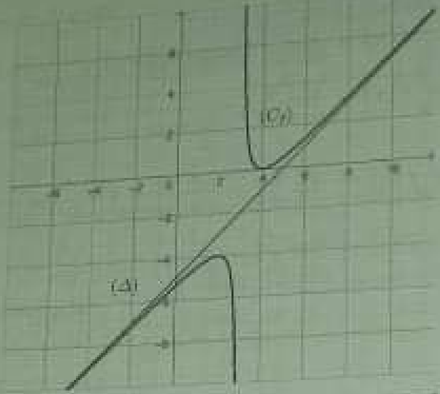
$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

أي يجب أن يكون: $f(2(3)-x)+f(x) = 2(-2)$

$$f(6-x)+f(x)$$
$$= (6-x)-5+\frac{1}{6-x-3}+\frac{1}{x-3}+x-5$$
$$= -4$$

ومنه: ω هي مركز تناظر لـ (C_f).

3- رسم (C_f)



1- بكالوريا 2019 الموضوع الأول

I- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $f(x) = a - \frac{1}{x+2}$

، حيث a عدد حقيقي

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

- عين قيم a حتى يقطع المنحنى (C_f) حامل محور التراتيب في النقطة ذات الترتيبة $\frac{1}{2}$

II- نضع $a=1$

1-أ- احسب:

$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ ، ثم $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

1-ب- فسر النتائج المحصل عليها بيانيا

2-أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$

2-ب- شكل جدول تغيرات الدالة f

3- عين احداثيي A نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين، ثم بين أنها مركز تناظر لـ (C_f)

4- اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

5- احسب $f(-1)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (Δ) ثم المنحنى (C_f)

6- حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $1 \le \frac{1}{x+2}$

الحل

I- تعيين قيمة a

(C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الترتيبة $\frac{1}{2}$ أي معناه

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

ومنه

$$a - \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

وبالتالي $\boxed{a=1}$

II- نضع $a = 1$ ومنه $f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$

1-أ- حساب النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) = 1 - \frac{1}{-\infty} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}}\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) = 1 - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}}\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) = 1 - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

تفسير النتائج بيانيا

المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ هو مستقيم مقارب شاقولي لـ(C_f)

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب افقي لـ(C_f)

2-أ- اتجاه تغير f

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)' = -\frac{0(x+2) - 1(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+2)^2}$$

لدينا $\frac{1}{(x+2)^2} > 0$ لأن $(x+2)^2 > 0$ و $1 > 0$

ومنه $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$

2-ب- جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

3- تعيين احداثيي A

A هي نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين أي المستقيمين

$x = -2$ $y = 1$

ومنه احداثيي النقطة هي $A(-2;1)$

تبيان أن A مركز تناظر لـ (C_f)

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$A(a,b)$$

$$A(-2,1)$$

$$f(2a - x) + f(x) = f(2(-2) - x) + f(x)$$

$$= f(-4 - x) + f(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{(-4-x)+2} + \left[1 - \frac{1}{x+2}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{-2-x} + 1 - \frac{1}{x+2}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{x+2}$$

$$= 2 = 2(1)$$

$$= 2(b)$$

اذن A مركز تناظر لـ (C_f)

4- كتابة معادلة المماس (Δ)

(Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

لدينا $f(0) = 1 - \frac{1}{0+2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

و $f'(0) = \frac{1}{(0+2)^2} = \frac{1}{4}$

ولدينا من قانون معادلة المماس عند نقطة

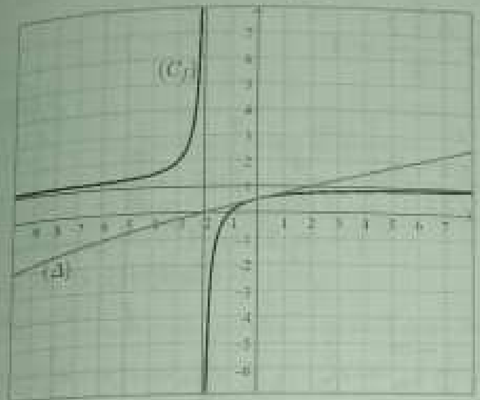
$$(\Delta): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 0) + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$$

5- انشاء (C_f) و (Δ)

$$f(-1) = 1 - \frac{1}{-1+2} = 0$$



6- حل المتراجحة $1 \le \frac{1}{x+2}$ بيانيا

لدينا المتراجحة $1 \le \frac{1}{x+2}$

تكافئ المتراجحة $1 - \frac{1}{x+2} \le 0$

ومنه $f(x) \le 0$

ومنه حل المتراجحة بيانيا هو المجال الذي يكون فيه (C_f) تحت محور الفواصل

وبالتالي: $S =]-2;-1]$

2- بكالوريا 2019 الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس

1- أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

2-أ- احسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها على $\mathbb{R}$

2-ب- احسب $f(0)$ و $f(-1)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3-أ- تحقق أنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x - 1)(2x^2 + 5x + 5)$$

3-ب- عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

4- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم أكتب معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A

5- أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f)

6- حل بيانيا المتراجحة: $f(x) \ge 0$

الحل

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^3+3x^2-5) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3+3x^2-5) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

2-أ- حساب المشتقة ودراسة اشارتها

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = (2x^3+3x^2-5)' = 6x^2+6x$$

اشارة f' من اشارة $6x^2+6x$

نحل المعادلة من الدرجة الثانية $6x^2+6x=0$

$$6x(x+1)=0$$

للمعادلة حلان هما $x=-1$ و $x=0$

ومنه اشارة العبارة عكس اشارة معامل اكبر حد (6) في المجال $]-1;0[$ ونفس اشارته على باقي المجال

أي:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$6x^2+6x$		+	0	−	0	+	

2-ب- جدول تغيرات f

$$f(-1) = 2(-1)^3+3(-1)^2-5 = -2+3-5 = -4$$

$$f(0) = 2(0)^3+3(0)^2-5 = -5$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	-5	↗	$+\infty$

3-أ- التحقق أن $f(x)=(x-1)(2x^2+5x+5)$

نقوم بنشر وتبسيط العبارة $(x-1)(2x^2+5x+5)$

$$(x-1)(2x^2+5x+5) = 2x^3+5x^2+5x-2x^2-5x-5 = 2x^3+3x^2-5 = f(x)$$

وهو المطلوب

3-ب- تعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

نقوم بحل المعادلة $f(x)=0$

أي $(x-1)(2x^2+5x+5)=0$

ومنه حلول المعادلة هي حلول المعادلتين

$(x-1)=0$ أو $(2x^2+5x+5)=0$

$$x-1=0$$

$$\boxed{x=1}$$

نقوم بحل المعادلة $2x^2+5x+5=0$ عن طريق حساب المميز Δ

$$\Delta = 5^2-4(2)(5) = 25-40 = -15 < 0$$

بما أن $\Delta<0$ فإنه ليس للمعادلة حلول في $\mathbb{R}$

ومنه لـ (C_f) نقطة تقاطع وحيدة مع محور الفواصل هي $E(1;0)$

4- اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\left(-\frac{1}{2}\right)$

عند نقطة الانعطاف تنعدم المشتقة الثانية وتغير اشارتها

f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f''(x) = (6x^2+6x)' = 12x+6$$

ومنه $f''(x)=0$ تكافئ

$$12x+6=0$$

$$x = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

f'' تنعدم عند $x=-\frac{1}{2}$ وتغير من اشارتها ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها $\left(-\frac{1}{2}\right)$

معادلة المماس (T) عند النقطة A

(T) مماس لـ (C_f) عند النقطة A لدينا

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{4}-\frac{6}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-5 = -\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-5 = -\frac{9}{2}$$

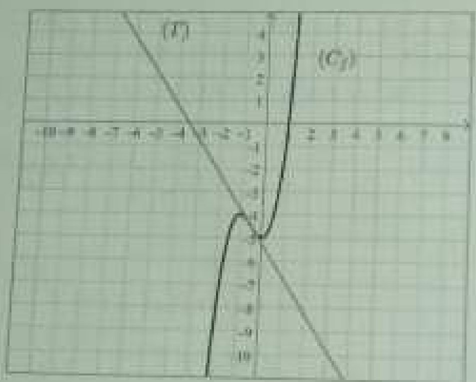
ومنه معادلة (T) هي

$$(T): y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{2}$$

$$y = \boxed{-\frac{3}{2}x-\frac{21}{4}}$$

5- انشاء (C_f) و (T)



6- حل المتراجحة $f(x) \geq 0$ بيانيا

من البيان نأخذ الجزء الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الفواصل وهو المجال $[1;+\infty[$

3- بكالوريا 2018 الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x^2$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1-احسب نهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$
2-أ-احسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها
2-ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
3-بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها
4-اكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1
5-أ-تحقق من ان النقطة O (مبدأ المعلم) والنقطة A ذات الفاصلة 3 هما نقطتي تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل
5-ب-ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f)
6-حل في $\mathbb{R}$ بيانيا المتراجحة: $f(x) > 0$
7-بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :
$f(x) + 4 = (x+1)(x-2)^2$ ، ثم حل المعادلة $f(x) = -4$

الحل

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

2- حساب $f'(x)$ ودراسة اشارتها

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x$$

لدراسة إشارة $f'(x)$ نحل المعادلة $3x^2 - 6x = 0$

$$3x^2 - 6x = 0$$

نقوم باستخراج x كعامل مشترك

$$x(3x - 6) = 0$$

اما

$$x = 0$$

او

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2$$

ومنه للمعادلة حلان هما $x = 0$ أو $x = 2$

-إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x^2 - 6x$		+	0	−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

2-ب- استنتاج اتجاه تغير f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

3-البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

حتى تجد نقطة انعطاف المنحنى (C_f) نحسب $f''(x)$ المشتقة الثانية للدالة f وندرس اشارتها:
f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$$

ندرس إشارة $f''(x)$ أي إشارة $6x - 6$

$$6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) = 0$$
$$x = 1$$

ومنه إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	

$f''(x)$ تنعدم عند النقطة $w(1; f(1))$ وتغير اشارتها
ومنه فإن النقطة $w(1;-2)$ تمثل نقطة انعطاف لـ (C_f)

4-كتابة معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند $x = 1$

معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

لدينا $f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3$
و $f(1) = 1^3 - 3(1)^2 = -2$

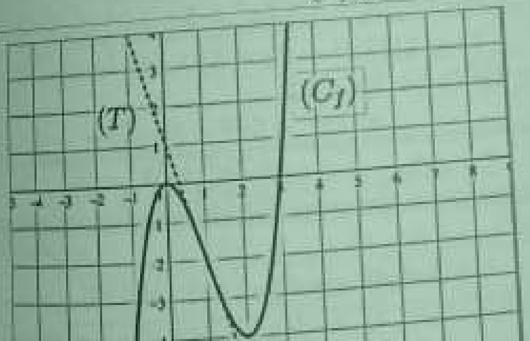
$$(T): y = -3(x-1) - 2$$
$$(T): y = -3x + 3 - 2 = -3x + 1$$
$$(T): \boxed{y = -3x + 1}$$

5-التحقق أن O و A هما نقطتي تقاطع (C_f) ومحور الفواصل

$$f(0) = 0^3 - 3(0)^2 = 0$$
$$f(3) = 3^3 - 3(3)^2 = 27 - 27 = 0$$

ومنه فإن النقطتين $O(0;0)$ و $A(3;0)$ هما نقطتي تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

5-ب- رسم (T) و (C_f)



6-حل المتراجحة $f(x) > 0$ بيانيا

لنحل المتراجحة $f(x) > 0$ بيانيا نبحث عن الجزء الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الفواصل أي المجال $]3;+\infty[$

7- البرهان أن $f(x) + 4 = (x+1)(x-2)^2$

$$f(x) + 4 = x^3 - 3x^2 + 4$$

طريقة: نقوم بنشر العبارة المعطاة $(x+1)(x-2)^2$ للوصول الى المطلوب

$$(x+1)(x-2)^2 = (x+1)(x^2 + 4 - 4x)$$

$= x^3 + 4x - 4x^2 + x^2 + 4 - 4x$
$= x^3 - 3x^2 + 4$
$= f(x) + 4$

- حل المعادلة $f(x) = -4$

$f(x) = -4$ تكافئ $f(x) + 4 = 0$

من السؤال السابق لدينا: $f(x) + 4 = (x+1)(x-2)^2$

ومنه حل المعادلة $f(x) = -4$ يكافئ حل المعادلة $(x+1)(x-2)^2 = 0$

$(x+1)(x-2)^2 = 0$

إما $x + 1 = 0$
$x = -1$

أو $(x-2)^2 = 0$
$x = 2$

ومنه حلول المعادلة $f(x) = -4$ هي $\{-1;2\}$

4- بكالوريا 2018 الموضوع الثاني

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3 - \frac{a}{x+1}$ حيث a عدد حقيقي

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

I- عين العدد الحقيقي a بحيث يشمل المنحنى (C_f) النقطة O مبدأ المعلم

II- نضع $a = 3$

1- اثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$: $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

2-أ- احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجالي تعريفها

2-ب- استنتج معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

3-أ- اثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 :
$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$$

3-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4- b عدد حقيقي، (Δ) مستقيم معادلته $y = 3x + b$

عين العدد b حتى يكون المستقيم (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -2$

5- ارسم المنحنى (C_f)

الحل

I- تعيين a

حتى يشمل المنحنى (C_f) النقطة $O(0;0)$ يجب أن يكون $f(0) = 0$ أي

$f(0) = 0$
$3 - \frac{a}{0+1} = 0$
$3 - a = 0$ $\boxed{a = 3}$

II- نضع $a = 3$

1- اثبات أن $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

لدينا $a = 3$ و $f(x) = 3 - \frac{a}{x+1}$ ومنه:

$$f(x) = 3 - \frac{a}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1} = \frac{3(x+1)}{x+1} - \frac{3}{x+1} = \frac{3x+3-3}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{3x}{x+1}$$

2-أ- حساب نهايات f عند حدود مجموعة تعريفها

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = 3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$

$\lim_{x\to-1^{>}} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{3x}{x+1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to-1^{<}} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{3x}{x+1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$

$x = -1$ و $y = 3$ معادلتا المستقيمين المقاربين لـ(C_f)

3-أ- اثبات عبارة $f'(x)$

من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن -1 ؛ f قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = \left(\frac{3x}{x+1}\right)' = \frac{3(x+1) - 3x}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{3}{(x+1)^2}}$$

3-ب- اتجاه تغير f

ندرس إشارة $f'(x)$:لدينا $(x+1)^2 > 0$ و $3 > 0$ ومنه $\frac{3}{(x+1)^2} > 0$ أي $f'(x) > 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على كل مجال تعريفها

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 3$

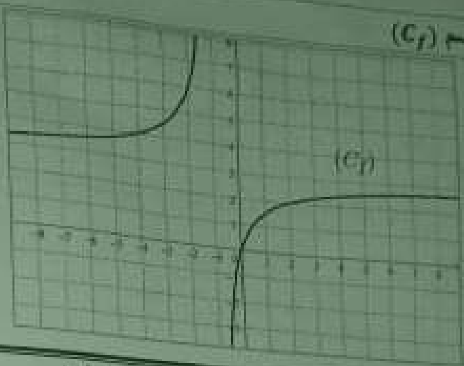
4- تعيين b حتى يكون (Δ) مماس لـ(C_f)

معادلة (Δ) المماس لـ(C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -2$

$(\Delta) : y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$
$f'(-2) = 3$
$f(-2) = 6$
(Δ): $y = 3(x+2) + 6 = \boxed{3x + 12}$

لدينا $y = 3x + b$ ومنه بالمطابقة مع معادلة (Δ) نجد
$b = 12$

5- رسم (C_f)



5- بكالوريا 2017 الموضوع الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-تحقق أن : من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 ،

$$f(x)=2+\frac{1}{2x-2}$$

2-أ-احسب النهايات التالي:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) \text{ ، } \lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ ، } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

2-ب-استنتج معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

3-أ-بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1،

$$f'(x)=-\frac{2}{(2x-2)^2}$$

3-ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4-جد احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات

5-اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2

6-ارسم (Δ) (C_f)

الحل

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ب: $f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$

1- التحقق أن $f(x)=2+\frac{1}{2x-2}$

طريقة: نقوم بنشر العبارة المعطاة حتى نصل الى عبارة f

$$2+\frac{1}{2x-2}=\frac{2(2x-2)}{2x-2}+\frac{1}{2x-2}=\frac{4x-4+1}{2x-2}$$
$$=\frac{4x-3}{2x-2}=f(x)$$

2- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x-3}{2x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x}{2x}\right)=\frac{4}{2}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-3}{2x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{2x}\right)=\frac{4}{2}=2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x-3}{2x-2}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x-3}{2x-2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

ومنه المستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $y=2$ مستقيمين مقاربين لـ(C_f)

3-أ-برهان عبارة $f'(x)$

$$f'(x)=0+\frac{0(2x-2)-2(1)}{(2x-2)^2}=\frac{-2}{(2x-2)^2}$$

3-ب- استنتاج اتجاه تغير f

لدينا $(2x-2)^2>0$ و $-2<0$ ومنه $\frac{-2}{(2x-2)^2}<0$ أي

$$f'(x)<0$$

ومنه f متناقصة تماما على $\mathbb{R}-\{1\}$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

4-احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات

1) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$

$$\frac{4x-3}{2x-2}=0\Rightarrow 4x-3=0$$
$$4x=3\Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل عند النقطة $A\left(\frac{3}{4};0\right)$

2)مع محور التراتيب نحسب $f(0)$

$$f(0)=\frac{4(0)-3}{2(0)-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

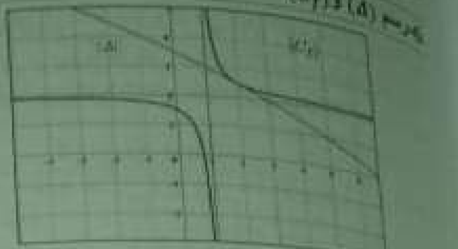
ومنه (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة $B\left(0;\frac{3}{2}\right)$

5- معادلة (Δ)

(Δ) مماس لـ(C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 أي

$$(\Delta): y=f'(2)(x-2)+f(2)$$
$$f'(2)=\frac{-2}{(2\times2-2)^2}=\frac{-2}{(4-2)^2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$
$$f(2)=\frac{2\times4-3}{2\times2-2}=\frac{5}{2}$$
$$(\Delta): y=-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}x+1+\frac{5}{2}$$
$$(\Delta): \boxed{y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}}$$

7-رسم (Δ) و (C_f)



6- بكالوريا 2017 الموضوع الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1-احسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2-أ-بين أن: من اجل كل عدد حقيقي x ،

$f'(x) = (x-2)(x+2)$

2-ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f

3-شكل جدول تغيرات الدالة f

4-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ، استنتج احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات

5-بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي مبدأ المعلم

6-اكتب معادلة المماس (T) لمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

7-ارسم (T) والمنحنى (C_f)

الحل

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1-حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$$

2-أ-اثبات عبارة $f'(x)$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = \frac{1}{3}\times(3x^2) - 4$$
$$f'(x) = x^2 - 4$$

نقوم بنشر العبارة المعطاة في السؤال أي $(x-2)(x+2)$

$$(x-2)(x+2) = x(x+2) - 2(x+2)$$
$$= x^2 + 2x - 2x - 4$$
$$= x^2 - 4$$

ومنه نستنتج بأن $f'(x) = (x-2)(x+2)$

2-ب-استنتاج اتجاه تغير f

ندرس إشارة المشتقة $f'(x)$ أي $(x-2)(x+2)$

نقوم بحل المعادلة $f'(x) = 0$ التي تكافئ المعادلة $(x-2)(x+2) = 0$ أي

اما $x - 2 = 0$

$\boxed{x = 2}$

او $x + 2 = 0$

$\boxed{x = -2}$

ومنه تكون إشارة $f'(x)$ كما يلي

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة على المجال $]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$

ومتناقصة على المجال $[-2;2]$

3- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

4-حل المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

$$f(x) = 0$$
$$\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$$
$$x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0$$

نقوم باستخراج x كعامل مشترك نجد

اما $\frac{1}{3}x^2 - 4 = 0$ او $x = 0$

$$x^2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{12} = -\sqrt{4\times3} = -2\sqrt{3} \\ x = \sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{-2\sqrt{3}; 0; 2\sqrt{3}\}$

مجموعة نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل هي

$$\{A(2\sqrt{3};0);\ O(0;0);\ B(-2\sqrt{3};0)\}$$

5-البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف في مبدأ المعلم

لكي يقبل (C_f) نقطة انعطاف عند O يجب أن تنعدم المشتقة الثانية $f''(x)$ وتغير اشارتها عند هاته النقطة

نقوم بحساب $f''(x)$ المشتقة الثانية لـ f وندرس اشارتها على D_f

f' قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة

$$f''(x) = [(x-2)(x+2)]'$$
$$= (1)(x+2) + (1)(x-2)$$
$$= (x+2) + (x-2)$$
$$= 2x + 2 - 2$$
$$= 2x$$

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

نلاحظ أن المشتقة الثانية لـ f تنعدم عند 0 وتغير اشارتها اذن (C_f) يقبل النقطة O مبدأ المعلم نقطة انعطاف

6-كتابة معادلة المماس (T) لـ(C_f) عند النقطة $x_0 = 0$

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

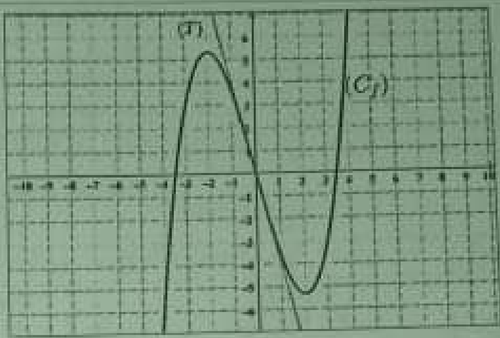
$f'(0) = (0-2)(0+2) = -2 \times 2 = -4$

$f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - 4(0) = 0$

$(T): y = -4(x-0) + 0$

$\boxed{y = -4x}$

7-رسم (T) و(C_f)



7- بكالوريا 2017 الموضوع الأول الدورة الاستثنائية

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-3\}$ بـ: $f(x) = -2 + \frac{a}{x+3}$ حيث a عدد حقيقي

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

I-جد قيمة العدد الحقيقي a حتى تنتمي النقطة $A(-2;5)$ الى المنحنى (C_f)

II-نضع في كل ما يلي: $a = 7$

1- تحقق أن: من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{-3\}$ ، $f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$

2- احسب النهايات الآتية:

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \overset{>}{\to} -3} f(x)$ ، $\lim_{x \overset{<}{\to} -3} f(x)$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

ثم استنتج معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

3- احسب $f'(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

4- شكل جدول تغيرات الدالة f

5- جد فواصل النقط من المنحنى (C_f) التي يكون عندها معامل توجيه المماس يساوي $-\frac{7}{4}$

6- جد احداثيي نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات

7- ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f)

الحل

I- إيجاد a

النقطة $A(-2;5)$ تنتمي الى (C_f) أي $f(-2) = 5$ ومنه:

$$f(-2) = -2 + \frac{a}{-2+3} = -2 + a$$

$-2 + a = 5$

$\boxed{a = 7}$

II- نضع $a = 7$

1-التحقق أن $f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$ من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{-3\}$

من اجل كل x حقيقي يختلف عن -3 لدينا $a = 7$ ومنه نعوض قيمة a بالعدد 7 في عبارة $f(x)$ المعطاة في التمرين

$$f(x) = -2 + \frac{7}{x+3} = -\frac{2(x+3)}{x+3} + \frac{7}{x+3}$$

$$= \frac{-2x-6+7}{x+3} = \boxed{\frac{-2x+1}{x+3}}$$

2-حساب النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2x+1}{x+3}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{2x}{x}\right) = -2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x+1}{x+3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{2x}{x}\right) = -2$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -3} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -3} \left(\frac{-2x+1}{x+3}\right) = \frac{-2(-3)+1}{-3+3} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -3} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -3} \left(\frac{-2x+1}{x+3}\right) = \frac{-2(-3)+1}{-3+3} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

ومنه المستقيمان ذو المعادلتين $x = -3$ و $y = -2$ هما مقاربين لـ(C_f)

3- حساب $f'(x)$ واستنتاج اشارتها

f قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \left(\frac{-2x+1}{x+3}\right)' = \frac{-2(x+3) - 1(-2x+1)}{(x+3)^2} = \frac{-2x-6+2x-1}{(x+3)^2} = \frac{-7}{(x+3)^2}$$

لندرس إشارة $f'(x)$ ندرس إشارة $\frac{-7}{(x+3)^2}$

نعلم أن $(x+3)^2 > 0$ و $-7 < 0$ ومنه $\frac{-7}{(x+3)^2} < 0$ ومنه $f'(x) < 0$

بما أن إشارة المشتقة سالبة فان الدالة f متناقصة تماما على مجال تعريفها

4- جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -2$

5- إيجاد فواصل نقط من (C_f) يكون عندها معامل توجيه المماس $-\frac{7}{4}$

معامل توجيه المماس = المشتقة

معامل توجيه المماس عند الفاصلة x_0 يساوي $-\frac{7}{4}$ معناه $f'(x_0) = -\frac{7}{4}$ ومنه

$$\frac{-7}{(x_0+3)^2} = -\frac{7}{4}$$
$$\frac{(x_0+3)^2}{7} = \frac{4}{7}$$
$$(x_0+3)^2 = 4$$
$$x_0^2 + 3^2 + 2 \times 3x_0 = 4$$
$$x_0^2 + 6x_0 + 5 = 0$$

نحل المعادلة من الدرجة الثانية وذلك بحساب المميز Δ

$$\Delta = (+6)^2 - 4 \times 5 \times 1 = 36 - 20 = 16$$
$$x_0 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$
$$x_0 = \frac{-6+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

ومنه الفواصل من (C_f) التي يكون فيها معامل توجيه المماس يساوي $-\frac{7}{4}$ هي -1 و-5

6- إيجاد احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي المحورين

إيجاد احداثيات نقط التقاطع مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$

$$\frac{-2x+1}{x+3} = 0 \Rightarrow -2x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

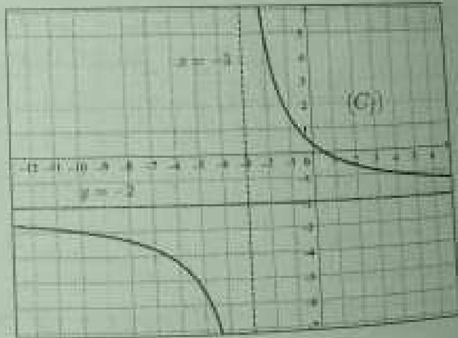
ومنه نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل $A\left(\frac{1}{2};0\right)$

إيجاد احداثيات نقط التقاطع مع محور التراتيب نحسب $f(0)$

$$f(0) = \frac{-2(0)+1}{0+3} = \frac{1}{3}$$

ومنه احداثيات نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب $B\left(0;\frac{1}{3}\right)$

7- رسم (C_f) والمستقيمين المقاربين



8- بكالوريا 2017 الموضوع الثاني الدورة الاستثنائية

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1-احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2-تحقق أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = (-x+1)(x+2)^2$ ثم جد احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات

3-ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4-بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف E احداثياتها $(-1;2)$

5-اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة E

6-ارسم (Δ) و (C_f)

الحل

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3 - 3x^2 + 4) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3 - 3x^2 + 4) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

2- التحقق من أن $f(x) = (-x+1)(x+2)^2$

نقوم بنشر العبارة المعطاة لنصل الى عبارة f

$$(-x+1)(x+2)^2 = (-x+1)(x^2+4x+4)$$
$$= -x(x^2+4x+4) + 1(x^2+4x+4)$$
$$= -x^3 - 4x^2 - 4x + x^2 + 4x + 4$$
$$= -x^3 - 3x^2 + 4$$
$$= f(x)$$

وهو المطلوب

- لإيجاد احداثيات نقط التقاطع مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$

$$(-x+1)(x+2)^2 = 0$$

اما $-x+1 = 0 \Rightarrow x = 1$

او $(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$

ومنه نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل هي $A(-2;0)$ و $B(1;0)$

- لإيجاد احداثيات نقط التقاطع مع محور التراتيب نحسب $f(0)$

$$f(0) = -(0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$$

ومنه احداثيات نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب $C(0;4)$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = -3x^2 - 6x = \boxed{-3x(x+2)}$$

إشارة f' من إشارة $-3x(x+2)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

$f(0) = 4\ ;\ f(-2) = 0$

4-البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

عند نقطة الانعطاف تنعدم المشتقة الثانية لـ f وتغير اشارتها f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$f''(x) = (-3x^2 - 6x)' = -6x - 6$

- ندرس إشارة f'' أي إشارة $-6x - 6$

$$-6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow 6x = -6$$
$$\Rightarrow x = -1$$

ومنه تكون إشارة $f''(x)$ كما يلي

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	

نلاحظ من الجدول أن f'' تنعدم عند $x = -1$ وتغير اشارتها ومنه فإنه عند تلك النقطة يقبل (C_f) نقطة انعطاف وهي النقطة $E(-1; f(-1))$ وبما أن $f(-1) = 2$ فإن نقطة الانعطاف هي $E(-1;2)$

5- كتابة معادلة المماس (Δ) في النقطة E

$(\Delta): y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

نحسب $f'(-1)$ و $f(-1)$

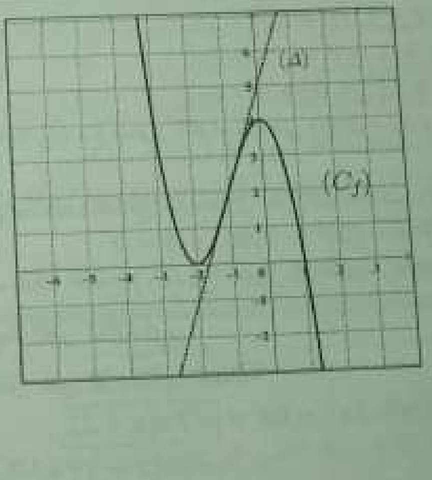
$$f'(-1) = -3(-1)^2 - 6(-1) = -3 + 6 = 3$$
$$f(-1) = -(-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$$

نعوض قيمة $f'(-1)$ و $f(-1)$ في معادلة (Δ)

$(\Delta): y = 3(x+1) + 2 = 3x + 3 + 2$

$\boxed{(\Delta): y = 3x + 5}$

6-رسم (Δ) (C_f)



9- بكالوريا 2016 الموضوع الأول

لتكن f دالة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x) = \frac{4-x}{x+1}$$

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1-أ-احسب:

$\lim\limits_{x \to -1^{>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -1^{<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

1-ب-استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكل منها

2-ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3-بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيه كل منها -5 يطلب تعيين معادلة لكل منهما

4-أنشئ المماسين (T_1) و (T_2) والمنحنى (C_f)

الحل

1-أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4-x}{x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{x}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x}\right) = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ <}}\left(\frac{4-x}{x+1}\right) = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ >}}\left(\frac{4-x}{x+1}\right) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

1-ب- استنتاج المستقيمات المقاربة لـ(C_f)

من السؤال السابق نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ هو مقارب افقي لـ(C_f)

و المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو مقارب شاقولي لـ(C_f)

2-دراسة اتجاه تغير الدالة f

لدراسة اتجاه تغير f نقوم باشتقاقها ودراسة إشارة المشتقة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{-1(x+1) - 1(4-x)}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-4+x}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-5}{(x+1)^2}}$$

لدينا $(x+1)^2 > 0$ و $-5 < 0$ ومنه $\frac{-5}{(x+1)^2} < 0$ ومنه

$f'(x) < 0$

وبالتالي f متناقصة تماما على مجال تعريفها

- تشكيل جدول تغيراتها

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -1$

3- البرهان أن (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2)

لدينا معامل توجيه المماسين يساوي -5 أي $f'(x)=-5$

نقوم بحل المعادلة :

$$f'(x)=-5$$
$$\frac{-5}{(x+1)^2}=-5$$
$$\frac{-5}{-5}=(x+1)^2$$
$$(x+1)^2=1$$
$$x^2+1+2x=1$$
$$x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0$$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{اما} \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 & \text{أو} \end{cases}$

كتابة معادلة المماسين

$(T_1): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$y=-5(x-0)+4$ $\quad \begin{cases} f'(0)=-5 \\ f(0)=4 \end{cases}$

$\boxed{y=-5x+4}$

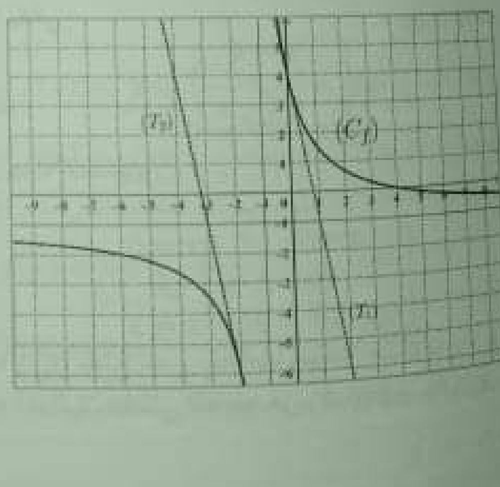
$(T_2): y=f'(-2)\big(x-(-2)\big)+f(-2)$

$(T_2) y=-5\big(x-(-2)\big)-6$ $\quad \begin{cases} f'(-2)=-5 \\ f(-2)=-6 \end{cases}$

$y=-5x-10-6$

$\boxed{y=-5x-16}$

4- انشاء المماسين و (C_f)



10- بكالوريا 2016 الموضوع الثاني

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=x^3-6x^2+9x$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2-أ- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=(3x-3)(x-3)$$

2-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3-أ- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة E ذات الفاصلة 2

3-ب- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)-(-3x+8)=(x-2)^3$$

3-ج- استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المماس (T)

3-د- برر ان E نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

4-أ- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x(x-3)^2$

4-ب- جد احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

5- احسب $f(4)$ ثم أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f)

الحل

f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x^3-6x^2+9x$

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-6x^2+9x) = \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3-6x^2+9x) = \lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

2- اثبات أن $f'(x)=(3x-3)(x-3)$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=(x^3-6x^2+9x)'=3x^2-12x+9$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$(3x-3)(x-3)=3x(x-3)-3(x-3)$$
$$=3x^2-9x-3x+9$$
$$=3x^2-12x+9$$
$$=f'(x)$$

2-ب- دراسة اتجاه تغير f

نقوم بدراسة إشارة المشتقة أي إشارة $(3x-3)(x-3)$

نقوم بحل المعادلة $(3x-3)(x-3)=0$

وهذا يكافئ حل المعادلة $x-3=0$ أو $3x-3=0$

ومنه $x=3$ أو $x=1$

ومنه تكون إشارة $(3x-3)(x-3)$ كما يلي

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$3x-3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(3x-3)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

تشكيل جدول تغيرات f

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

$$f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9 = -5 + 9 = \boxed{4}$$
$$f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) = 27 - 54 + 27 = \boxed{0}$$

3-أ- كتابة معادلة المماس (T)

(T) هو مماس لـ(Δ) عند النقطة E ذات الفاصلة 2
لدينا معادلة المماس عند الفاصلة x_0 يعطى بالقانون
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
عند النقطة ذات الفاصلة 2 يكون
$$(T):\ y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
نقوم بحساب $f'(2)$ و $f(2)$ وذلك بتعويض العدد 2 في مكان x في كل من عبارة f و f'
لدينا $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ومنه
$$f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 9(2) = 8 - 24 + 18 = \boxed{2}$$
ولدينا كذلك $f'(x) = (3x-3)(x-3)$ ومنه
$$f'(2) = (3(2)-3)(2-3) = 3 \times -1 = \boxed{-3}$$
نقوم بتعويض قيمة كل من $f'(2)$ و $f(2)$ في معادلة المماس (T)
$$y = -3(x-2) + 2$$
$$y = -3x + 6 + 2$$
$$\boxed{y = -3x + 8}$$

3-ب- البرهان أن $f(x) - (-3x+8) = (x-2)^3$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x؛ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

- نقوم بحساب أولا الفرق $f(x) - (-3x+8)$
$$f(x) - (-3x+8) = (x^3 - 6x^2 + 9x) - (-3x+8)$$
$$= x^3 - 6x^2 + 9x + 3x - 8$$
$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
- ثانيا نقوم بنشر وتبسيط العبارة $(x-2)^3$
$$(x-2)^3 = (x-2)(x-2)^2$$
$$= (x-2)(x^2 + 4 - 4x)$$
$$= x(x^2 + 4 - 4x) - 2(x^2 + 4 - 4x)$$
$$= x^3 + 4x - 4x^2 - 2x^2 - 8 + 8x$$
$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
ومنه نستنتج أن:
$$\boxed{f(x) - (-3x+8) = (x-2)^3}$$

3-جـ- استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة الى المماس (T)

لكي ندرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المماس (T) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ أي:
$$f(x) - (-3x+8)$$
من السؤال السابق لدينا:
$$f(x) - (-3x+8) = (x-2)^3$$
ومنه ندرس إشارة $(x-2)^3$
لدينا $(x-2)^3 = (x-2)(x-2)^2$
نعلم أن تربيع أي عدد يعطينا عددا موجبا ومنه $(x-2)^2 \geq 0$
ومنه إشارة $(x-2)^3$ هي نفسها إشارة $(x-2)$
لدينا:
$$x - 2 = 0$$
ومنه:
$$x = 2$$

ومنه جدول الوضعية يكون كالتالي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(-3x+8)$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) أسفل (T)	تقاطع	(C_f) فوق (T)	

3-د- البرهان أن E نقطة انعطاف لـ(C_f)

> **قاعدة: اذا كان المماس يخترق المنحنى في نقطة ويغير وضعيته بالنسبة للمنحنى فإن تلك النقطة هي نقطة انعطاف للمنحنى**

لدينا (T) مماس (C_f) عند النقطة E ذات الفاصلة 2
ومن السؤال السابق لدينا (T) يقطع (C_f) عند E ذات الفاصلة 2 ويغير وضعيته بالنسبة لـ(C_f) ومنه فتلك النقطة هي نقطة انعطاف لـ(C_f)

4-أ- البرهان أن : $f(x) = x(x-3)^2$

طريقة سهلة : نقوم بنشر وتبسيط العبارة $x(x-3)^2$ لنتحصل لعبارة $f(x)$
$$x(x-3)^2 = x(x^2 + 3^2 - 6x)$$

> **متطابقة شهيرة:** $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

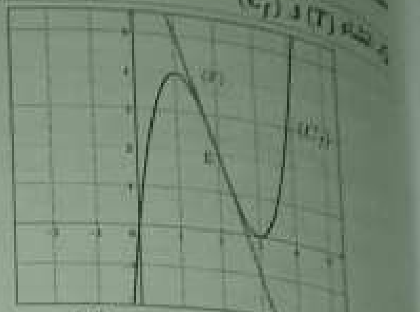
$$x(x-3)^2 = x^3 + 9x - 6x^2$$
ومنه:
$$\boxed{x(x-3)^2 = f(x)}$$

4-ب- إيجاد احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

> **لإيجاد احداثيات نقط التقاطع (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x_0) = 0$**
> **حيث احداثيات النقطة هي $(x_0; f(x_0))$**

$$f(x) = 0$$
نستعمل عبارة $f(x)$ التي وجدناها في السؤال السابق
$$x(x-3)^2 = 0$$
وهذا يكافئ:
$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ (x-3)^2 = 0 \end{cases}$$
نحل جملة المعادلتين:
$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ (x-3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 3 \end{cases}$$
ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل مرتين عند $x = 0$ و $x = 3$
ومنه احداثيات نقطتي التقاطع هي $O(0;0)$ و $A(3;0)$

(T) و (C_f)



$(T): y = -3x + 8$

11- بكالوريا 2015 الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـــ: $f(x) = \frac{-x+3}{x-2}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1-أ- احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ب- استنتج معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

2- احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

3- شكل جدول تغيرات الدالة f

4- a و b عددان حقيقيان، (Δ) مستقيم معادلته $y = ax + b$

عين العددين a و b علما أن المستقيم (Δ) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

5-أ- تحقق أنه لكل x من $\mathbb{R} - \{2\}$: $f(x) = -1 + \frac{1}{x-2}$

ب- استنتج النقط من المنحنى (C_f) التي احداثياتها أعداد صحيحة

6- أنشئ (Δ) و (C_f)

الحل

1- حساب النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x+3}{x-2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{x}{x}\right) = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x+3}{x-2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{x}{x}\right) = -1$$

- المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ مستقيم مقارب افقي لـ (C_f)

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(\frac{-x+3}{x-2}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left(\frac{-x+3}{x-2}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مستقيم مقارب شاقولي لـ (C_f)

2- حساب $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{2\}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-1(x-2) - 1(-x+3)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x+2+x-3}{(x-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}}$$

- لاستنتاج اتجاه تغير f ندرس إشارة المشتقة

لدينا

$(x-2)^2 > 0$ و $-1 < 0$

ومنه فإن $\frac{-1}{(x-2)^2} < 0$ أي أن $f'(x) < 0$

وبالتالي فإن f متناقصة تماما

3- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

4- تعيين العددين a و b

لدينا (Δ) مستقيم معادلته: $y = ax + b$

(Δ) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

هذا يعني أن معادلة المستقيم (Δ) حسب قانون معادلة المماس

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

نحسب $f'(0)$ و $f(0)$

$$f(0) = \frac{0+3}{0-2} = -\frac{3}{2}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{(0-2)^2} = -\frac{1}{4}$$

ومنه تصبح معادلة (Δ): $y = -\frac{1}{4}(x-0) - \frac{3}{2}$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$$

بالمطابقة نجد $a = f'(0) = -\frac{1}{4}$ و $b = f(0) = -\frac{3}{2}$

5-أ- التحقق أن $f(x) = -1 + \frac{1}{x-2}$

نقوم بتبسيط العبارة $-1 + \frac{1}{x-2}$ وصولا الى عبارة f

$$-1 + \frac{1}{x-2} = \frac{-1(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2}$$
$$= \frac{-x+2+1}{x-2}$$
$$= \frac{-x+3}{x-2}$$
$$= f(x)$$

5-ب- استنتاج النقط من (C_f) التي احداثياتها اعداد صحيحة

حتى تكون الاحداثيات اعداد صحيحة (لا تحتوي على فاصلة)

لدينا $f(x) = -1 + \frac{1}{x-2}$

ومنه يجب أن يكون $x - 2$ من قواسم 1

قواسم 1 هي $(1; -1)$ ومنه

$$\begin{cases} x - 2 = -1 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 1 \end{cases}$$

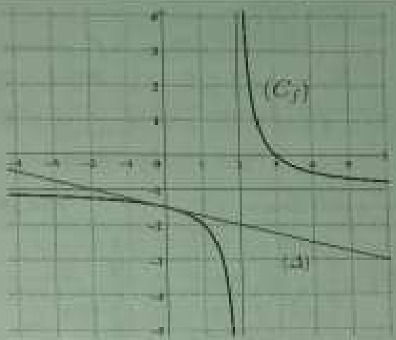
ومنه

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = 3 \end{cases}$$

وبالتالي تلك النقط هي $A(1; f(1))$ و $B(3; f(3))$

أي $A(1; -2)$ و $B(3; 0)$

6-رسم (Δ) و (C_f)



12- بكالوريا 2015 الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3- بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها

4- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

5- احسب $f(-2)$ و $f(2)$ ، ثم أنشئ (T) و (C_f)

6-أ- أنشئ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 2$

6-ب- حل في $\mathbb{R}$ ، بيانيا المتراجحة $f(x) \geq x + 2$

الحل

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x + 2)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x + 2)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة f

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 2)'$$
$$= 3x^2 - 3$$

ومنه إشارة المشتقة من إشارة $3x^2 - 3$

نحل المعادلة

$$3x^2 - 3 = 0$$
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$

ومنه للمعادلة حلان هما

$$x = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

تكون إشارة العبارة $f'(x)$ كما يلي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

3-البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

نقطة انعطاف: تنعدم عندها المشتقة الثانية مغيرة اشارتها

نقوم بحساب المشتقة الثانية:

$$f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$$

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند 0 وتغير اشارتها ومنه فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $(0; f(0))$ ومنه احداثيات نقطة الانعطاف هي $(0;2)$

4-كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

لدينا:

$$f'(0) = -3$$
$$f(0) = 2$$

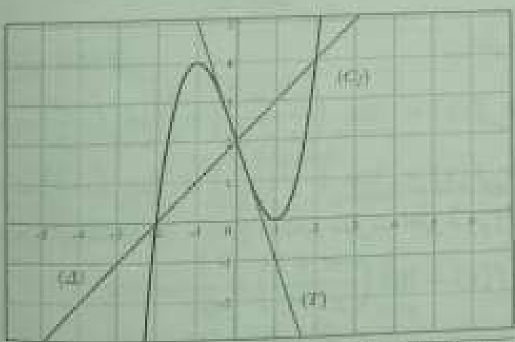
ومنه: $(T): y = -3(x - 0) + 2$

$$\boxed{(T): -3x + 2}$$

5- حساب $f(-2)$ و $f(2)$

$$f(2) = (2)^3 - 3(2) + 2$$
$$= 8 - 6 + 2$$
$$= 4$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2$$
$$= -8 + 6 + 2$$
$$= 0$$

6-أ- رسم (C_f) و (T) و (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$



6-ب- الحل بيانيا المتراجحة $f(x) \geq x + 2$

لدينا:

$$f(x) \geq x + 2$$

تكافئ:

$$f(x) - (x + 2) \geq 0$$

ومنه

$$f(x) - y_\Delta \geq 0$$

وهذا يمثل الفرق بين عبارة الدالة f و معادلة المستقيم (Δ) وهو يمثل الوضع النسبي بين منحنى (C_f) و المستقيم (Δ) لكي نحل المتراجحة بيانيا نجد المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق (Δ)

ومنه حل المتراجحة هو $x \in [-2;0] U [2;+\infty[$

13- بكالوريا 2014 الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ كما يلي :

$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- عين العدد الحقيقي α بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{-2\}$

$f(x) = \alpha - \frac{3}{x+2}$

2-عين النقط من المنحنى (C_f) التي احداثياتها اعداد صحيحة

3-احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجالي تعريفها

4-أ-بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-2\}$:

$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$

(f' الدالة المشتقة للدالة f)

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f

5-عين احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات

6-اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة -1

7-بين انه يوجد مماس آخر (Δ') للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)

8-ارسم المماس (Δ) والمنحنى (C_f)

الحل

1-تعيين α بحيث $f(x) = \alpha - \frac{3}{x+2}$

نقوم بنشر العبارة $\alpha - \frac{3}{x+2}$ حيث:

$$\alpha - \frac{3}{x+2} = \frac{\alpha(x+2)}{x+2} - \frac{3}{x+2}$$
$$= \frac{\alpha x + 2\alpha}{x+2} - \frac{3}{x+2}$$
$$= \frac{\alpha x + 2\alpha - 3}{x+2}$$

ولدينا $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ومنه بالمطابقة مع $\frac{\alpha x+2\alpha-3}{x+2}$ نجد

$$\begin{cases} \alpha x = 2x \\ 2\alpha - 3 = 1 \end{cases}$$

نحل جملة المعادلتين: نجد $\boxed{\alpha = 2}$

2-تعيين النقط التي احداثياتها اعداد صحيحة

حتى تكون احداثيات نقطة ما اعدادا صحيحة يجب أن تكون كل من الفاصلة x_0 والترتيبة $f(x_0)$ اعدادا صحيحة

من السؤال السابق لدينا $f(x) = \alpha - \frac{3}{x+2}$

ومنه حتى يكون $f(x)$ عددا صحيحا يجب أن يكون $\alpha - \frac{3}{x+2}$ عددا صحيحا

ولكي يكون $\alpha - \frac{3}{x+2}$ صحيحا يجب أن يكون الكسر $\frac{3}{x+2}$ عددا صحيحا ومنه يجب أن يكون 3 قابلا للقسمة على $x+2$

-لدينا مجموعة قواسم 3 هي $\{-3;-1;1;3\}$

ومنه لكي يكون $x+2$ قاسما لـ 3 يجب أن

$$\begin{cases} x+2 = -3 \\ x+2 = -1 \\ x+2 = 1 \\ x+2 = 3 \end{cases} \text{ ومنه } \Leftarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

ومنه النقط التي احداثياتها اعداد صحيحة هي $A(-1;f(-1))$ و $B(1;f(1))$ و $C(-3;f(-3))$ و $D(-5;f(-5))$

وبالتالي النقط هي $A(-1;-1)$ ، $B(1;1)$ و $C(-3;5)$ و $D(-5;3)$

3- حساب نهايات f عند حدود مجموعة تعريفها

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to-2}f(x) = \lim_{x\to-2}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-2}f(x) = \lim_{x\to-2}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

التفسير الهندسي: $x = -2$ و $y = 2$ معادلتا مستقيمين مقاربين الأول عمودي والثاني أفقي

4-أ- اثبات أن $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R} - \{-2\}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)' = \frac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}$$
$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}}$$

4-ب- تشكيل جدول تغيرات f

لدينا $(x+2)^2 > 0$ و $3 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R} - \{-2\}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	2 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 2

5- تعيين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات

1) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$

$$\frac{2x+1}{x+2} = 0$$

وهذا يكافئ حل المعادلة $2x+1 = 0$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

2)مع محور التراتيب :

$$f(0) = \frac{2(0)+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

اذن $y = \frac{1}{2}$

6-أ- كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة 1−

معادلة المماس (Δ)

$$(\Delta): y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$$

لدينا

$$f'(-1) = \frac{3}{(-1+2)^2} = 3$$

$$f(-1) = \frac{2(-1)+1}{-1+2} = \frac{-2+1}{1} = -1$$

ومنه :

$$y = 3(x+1) - 1$$

$$\boxed{(\Delta): y = 3x+2}$$

6-ب- البرهان أنه يوجد مماس (Δ') يوازي (Δ)

(Δ) يوازي (Δ') معناه أنه لهما نفس معامل التوجيه

معامل توجيه المماس (Δ) هو 3 ومنه يجب أن يكون معامل توجيه (Δ') أيضا 3 أي

$$f'(x) = 3$$

ومنه

$$\frac{3}{(x+2)^2} = 3$$

وهذا يوافق

$$(x+2)^2 = 1$$

بتجذير الطرفين

$$\begin{cases} x+2 = 1 \\ \text{أو} \\ x+2 = -1 \end{cases}$$

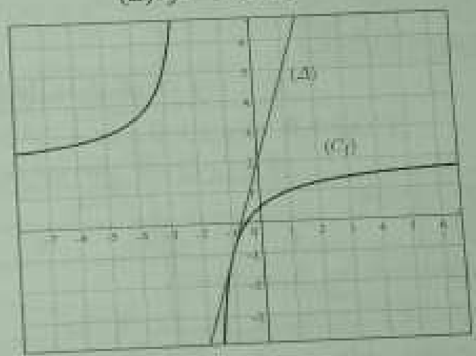
ومنه

$$\begin{cases} x = -1 & (\Delta) \\ x = -3 & (\Delta') \end{cases}$$

بما أن المعادلة $f'(x) = 3$ تقبل حلين $x = -1$ و $x = -3$ فإنه يوجد مماس اخر (Δ') يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة3−

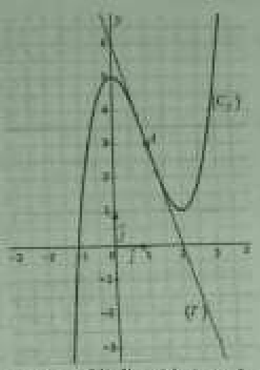
7- رسم (Δ) و (C_f)

$(\Delta): y = 3x+2$



14- بكالوريا 2014 الموضوع الثاني

تعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(1;3)$ كما في الشكل:



I- بقراءة بيانية: 1- خمن نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها

3-أ-اكتب معادلة للمماس (T)

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (T) ثم استنتج أن A في نقطة الانعطاف للمنحنى (C_f)

4-عين حلول المتراجحة : $f(x) > 5$

II-اذا علمت أن f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل :

$f(x) = x^3 + ax^2 + b$ حيث: a و b عددان حقيقيان

1- عين العددين a و b

2- تحقق من صحة اجاباتك السابقة حول:

أ-اتجاه تغير f

ب-معادلة المماس (T)

جـ- نقطة الانعطاف A

د- حلول المتراجحة: $f(x) > 5$

الحل

1- تخمين نهايتي الدالة f

من تمثيل البياني (C_f) نلاحظ أن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2- دراسة اتجاه تغير f على $\mathbb{R}$

f متزايدة تماما على كل من المجال $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $[0;2]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

3-أ- كتابة معادلة المماس (T)

معادلة (T) المماس عند النقطة $A(1;3)$ من الشكل

$$y = ax + b$$

حيث a يمثل معامل التوجيه

... معامل توجيه المماس (T) يساوي -3

$$a = -\frac{6}{2} = -3$$

$$3 = -3 \times 1 + b$$

$$b = 6$$

وبالتالي معادلة المماس (T) : $\boxed{(T):\ y = -3x + 6}$

... دراسة وضعية (C_f) مع (T)

... البيان نجد :

(C_f) فوق (T) على المجال $]1; +\infty[$

(C_f) أسفل (T) على المجال $]-\infty; 1[$

(C_f) يقطع (T) في النقطة A

... إذا كان المماس يخترق المنحنى في نقطة فإن تلك النقطة هي نقطة انعطاف للمنحنى

... المماس (T) يقطع (C_f) في النقطة A ومنه فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند A

... تعيين حلول المتراجحة $f(x) > 5$

من البيان حلول المتراجحة تمثل المجال الذي يكون فيه البيان فوق المستقيم $y = 5$

ومنه حلول المتراجحة هي $]3; +\infty[$

... f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 + ax^2 + b$

1- تعيين a و b

لدينا من البيان $f(0) = 5$

من عبارة f المعطاة لدينا $f(0) = 0^3 + a(0)^2 + b = b$

ومنه $\boxed{b = 5}$

لدينا (C_f) يمر بالنقطة $A(1;3)$ أي $f(1) = 3$

ومنه بالتعويض في عبارة f نجد

$$f(1) = 1^3 + a(1)^2 + 5 = 3$$

ومنه $1 + a + 5 = 3$

ومنه $\boxed{a = -3}$

وبالتالي $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 5}$

2- التحقق من صحة الإجابات السابقة

أ) اتجاه تغير f

نقوم بالاشتقاق ودراسة إشارة المشتقة

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 5)' = \boxed{3x^2 - 6x}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $3x^2 - 6x$

نقوم بحل المعادلة $3x^2 - 6x = 0$ ومنه $3x(x-2) = 0$

للمعادلة حلان هما $x = 0$ و $x = 2$

ومنه تكون إشارة $f'(x)$ كما يلي

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على كل من المجال $]-\infty; 0]$ و $[2; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $[0; 2]$

ب) معادلة المماس (T)

معادلة المماس (T) عند النقطة $A(1;3)$

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

نحسب $f'(1)$ و $f(1)$

$$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 5 = 3$$

ومنه :

$$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3$$

$$(T)\ y = -3(x-1) + 3$$

$$\boxed{y = -3x + 6}$$

جـ) نقطة الانعطاف

عند نقطة الانعطاف تنعدم المشتقة الثانية $f''(x)$ وتغير اشارتها

f' قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة $f''(x)$

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$$

$$6x - 6 = 0$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند 1 وتغير اشارتها ولدينا $f(1) = 3$ ومنه فإن (C_f) يقبل النقطة $A(1;3)$ كنقطة انعطاف

د) حلول المتراجحة $f(x) > 5$

حل المتراجحة $f(x) > 5$

يكافئ حل المتراجحة

$$x^3 - 3x^2 + 5 > 5$$

ومنه

$$x^3 - 3x^2 > 0$$

نستخرج x^2 كعامل مشترك

$$x^2(x-3) > 0$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه

$$x - 3 > 0$$

أي

$$x > 3$$

ومنه حل المتراجحة $]3; +\infty[$

15- بكالوريا 2013 الموضوع الأول

في الشكل المقابل، المنحنى (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

والمستقيم (Δ) هو مماس للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم O، حيث: $y = g(x)$ معادلة له

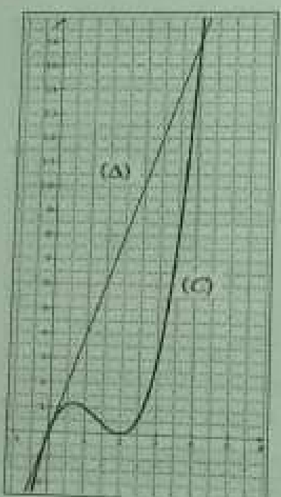
I-بقراءة بيانية ، عين:

1-عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

2-إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

3-عدد حول المعادلة: $f(x) = g(x)$

II-باستعمال عبارة الدالة f :



1-أ- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

1-ب- احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس إشارتها

1-جـ - شكل جدول تغيرات الدالة f

2-أ- اثبت انه، من اجل كل عدد حقيقي x

$$f(x) = x(x-2)^2$$

2-ب- عين احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

3-أ- بين ان: $g(x) = 4x$

3-ب- عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع (Δ)

4- بين أن، (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلة $\frac{4}{3}$

5- عين بيانيا، مجموعة قيم الوسيط الحقيقي m ، التي من اجلها تقبل المعادلة $f(x) = m$ ثلاثة حلول متمايزة

الحل

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3-4x^2+4x$

I- الاستنتاج من البيان

1-نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

توجد نقطتين يتقاطع فيها (C_f) مع محور الفواصل وهي $O(0;0)$ و $A(2;0)$

2- إشارة $f(x)$

من البيان لدينا

$f(x)>0$ لما $x\in]0;2[\cup]2;+\infty[$

و $f(x)<0$ لما $x<0$

و $f(x)=0$ لما $x=0$ ولما $x=2$

3- عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

هي عدد النقط التي يتقاطع فيها (C_f) مع (C_g) وعددها 2

II- باستعمال عبارة f

1-أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-4x^2+4x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3-4x^2+4x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

ب- حساب المشتقة ودراسة اشارتها

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=(x^3-4x^2+4x)'=3x^2-8x+4$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة العبارة $3x^2-8x+4$

نقوم بحل المعادلة من الدرجة الثانية $3x^2-8x+4=0$

نحسب المميز Δ $\quad \Delta=b^2-4ac$

$$\Delta=8^2-4(3)(4)=16$$

بما أن $\Delta>0$ فإن للمعادلة حلان هما

$$x_1=\frac{8+\sqrt{16}}{2\times3}=\frac{8+4}{6}=\frac{12}{6}=2$$

$$x_2=\frac{8-\sqrt{16}}{2\times3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

ومنه إشارة $3x^2-8x+4$ سالبة على المجال بين الحلين وموجبة على باقي المجال أي

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جـ- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

2- اثبات أن $f(x)=x(x-2)^2$

نقوم بنشر وتبسيط العبارة $x(x-2)^2$

$$x(x-2)^2=x(x^2+4-4x)$$
$$=x^3+4x-4x^2$$
$$=f(x)$$

2-ب- احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x)=0$

لدينا من السؤال السابق $f(x)=x(x-2)^2$

ومنه $x(x-2)^2=0$

اما $\boxed{x=0}$

أو $x-2=0$ أي $\boxed{x=2}$

لدينا $f(0)=0$ و $f(2)=0$

ومنه نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل هي

$\boxed{O(0;0)}$ و $\boxed{A(2;0)}$

3-أ- اثبات أن $g(x)=4x$

لدينا (Δ) هو مماس (C_f) عند النقطة $O(0;0)$ معادلته $y=g(x)$

ومعادلته تعطى بالعبارة $(\Delta):y=f'(0)(x-0)+f(0)$

لدينا $f'(0)=3(0)^2-8(0)+4=4$

و $f(0)=0$

ومنه $(\Delta):y=4x$

ومنه $\boxed{g(x)=4x}$

3-ب- فواصل نقط تقاطع (C_f) مع (Δ)

نقوم بحل المعادلة $f(x)-y$ حيث y يمثل معادلة المماس(Δ)

$$f(x)-y=x^3-4x^2+4x-4x$$
$$=x^3-4x^2$$
$$x^3-4x^2=0$$
$$x^2(x-4)=0$$

للمعادلة حلان هما $x=0$ أو $x-4=0$ أي $x=4$

ومنه فواصل نقط تقاطع (C_f) مع (Δ) هي

$\boxed{x=0}$ و $\boxed{x=4}$

4- اثبات أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\frac{4}{3}$

عند نقطة الانعطاف تنعدم المشتقة الثانية للدالة وتغير اشارتها

f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f''(x)=(3x^2-8x+4)'=\boxed{6x-8}$$
$$6x-8=0$$
$$x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

المشتقة الثانية تنعدم عند $x=\frac{4}{3}$ وتغير من اشارتها ومنه فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\frac{4}{3}$

5- تعيين بيانيا قيم m حتى تقبل المعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول متمايزة

يعني تلك القيمة نفسها تأخذها $f(x)$ 3 مرات

بيانيا (C_f) يمر بثلاث نقط لها نفس الترتيبة $f(x)$ وتختلف في الفاصلة x

وهي المجال $\left]0;f\left(\frac{2}{3}\right)\right[$ ولدينا $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{27}$

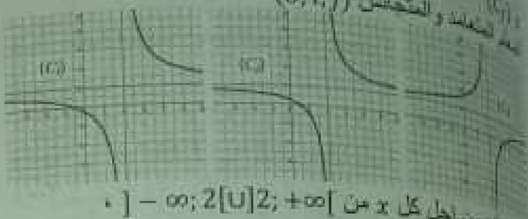
ومنه قيم m هي $m\in\left]0;\frac{32}{27}\right[$

16- بكالوريا 2013 الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بالعبارة

$$f(x)=\frac{2x-1}{2x-4}$$

(C_f) المنحنى البياني الممثل لها في المستوي المنسوب الى معلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$



- بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، $f(x)=1+\frac{3}{2x-4}$
- هل النقطة $A\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ تنتمي الى (C) ؟
- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها
- استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة كل منهما
- احسب $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
- عين فواصل نقط المنحنى (C_f) ، التي يكون معامل توجيه المماس عندها يساوي $-\frac{3}{2}$
- جد احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع كل من حامل محور الفواصل وحامل محور التراتيب
- عين مع التبرير، المنحنى (C_f) من بين المنحنيات (C_1) ، (C_2) ، (C_3) الممثلة أدناه

الحل

1- البرهان أن $f(x)=1+\frac{3}{2x-4}$

ننطلق من العبارة $1+\frac{3}{2x-4}$ وصولا الى عبارة f

$$1+\frac{3}{2x-4}=\frac{2x-4}{2x-4}+\frac{3}{2x-4}$$
$$=\frac{2x-4+3}{2x-4}$$
$$=\frac{2x-1}{2x-4}=f(x)$$

2- اثبات أن النقطة A تنتمي الى (C_f)

حتى تنتمي النقطة $A\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ الى (C_f) يجب أن تحقق احداثياتها x_0 و y_0 ما يلي: $f(x_0)=y_0$ أي $f(1)=-\frac{1}{2}$

$$f(1)=\frac{2(1)-1}{2(1)-4}=\frac{2-1}{2-4}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

ومنه A تنتمي الى (C_f)

3- حساب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{2x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x}=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{2x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{2x-1}{2x-4}=\frac{2(2)-1}{2(2)-4}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{2x-1}{2x-4}=\frac{2(2)-1}{2(2)-4}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $y=1$ و $x=2$

4- حساب $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على المجال $]2;+\infty[$ و $]-\infty;2[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{2x-4}\right)'=\frac{2(2x-4)-2(2x-1)}{(2x-4)^2}$$
$$=\frac{4x-8-4x+2}{(2x-4)^2}$$
$$=\frac{-6}{(2x-4)^2}$$

لدينا $(2x-4)^2>0$ و $-6<0$

ومنه $\frac{-6}{(2x-4)^2}<0$ أي $f'(x)<0$ ومنه f متناقصة تماما

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

5- فواصل نقط من (C_f) التي يكون معامل توجيه المماس عندها يساوي $-\frac{3}{2}$

معامل التوجيه يساوي المشتقة عند تلك النقطة

معناه: $f'(x)=-\frac{3}{2}$

$$-\frac{6}{(2x-4)^2}=-\frac{3}{2}$$
$$\frac{(2x-4)^2}{6}=\frac{2}{3}$$
$$(2x-4)^2=4$$

ومنه

$$\begin{cases}2x-4=-2\\ \text{أو}\\ 2x-4=2\end{cases}$$

ومنه للمعادلة حلان هما: $x=1$ و $x=3$

ومنه فواصل النقط التي يكون فيها معامل توجيه المماس $-\frac{3}{2}$ هي $x=1$ و $x=3$

6- إيجاد احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع المحورين

1) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$

$$f(x)=0$$
$$\frac{2x-1}{2x-4}=0$$

بما أن المقام لا ينعدم فان: $2x-1=0$

ومنه $2x=1$

أي $x=\frac{1}{2}$

ولدينا $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{2\left(\frac{1}{2}\right)-4}=0$

ومنه نقطة التقاطع مع محور الفواصل هي $E\left(\frac{1}{2};0\right)$

2) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$

$$f(0)=\frac{2(0)-1}{2(0)-4}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

ومنه نقطة التقاطع مع محور الفواصل هي $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$

7- تعيين (C_f) من بين المنحنيات

(C_f) هو (C_2) لأن f متناقصة و (C_f) يمر من النقطة $\left(\frac{1}{2};0\right)$ وكذلك (C_2)

17- بكالوريا 2012 الموضوع الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x)=-x^3+3x^2-4$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

2- احسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها (f' الدالة المشتقة للدالة f)

3- شكل جدول تغيرات الدالة f

4- أ- اكتب معادلة للمستقيم (Δ) المماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1

4- ب- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)-(3x-5)=-(x-1)^3$$

4- جـ- ادرس الوضع النسبي للمنحنى للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

5- احسب $f(-1)$ ثم أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C_f)

الحل

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^3+3x^2-4)=\lim_{x\to-\infty}-x^3=-(-\infty)^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x^3+3x^2-4)=\lim_{x\to+\infty}-x^3=-(+\infty)^3=-\infty$$

2- حساب المشتقة ودراسة اشارتها

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=(-x^3+3x^2-4)'=-3x^2+6x$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة العبارة $-3x^2+6x$

لدراسة إشارة العبارة نقوم بحل المعادلة من الدرجة الثانية

$$3x^2+6x=0$$
$$x(-3x+6)=0$$

ومنه اما يكون $x=0$

أو $-3x+6=0$ أي $x=\frac{-6}{-3}=2$

بما أن للمعادلة حلين فإن إشارة العبارة $-3x^2+6x$ عكس إشارة -3 في المجال الذي بين الحلين ونفس إشارة -3 على باقي المجال أي

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3- جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

$$f(0)=-(0)^3+3(0)^2-4=-4$$
$$f(2)=-(2)^3+3(2)^2-4=-8+12-4=0$$

4- أ- كتابة معادلة المستقيم (Δ) مماس (C_f)

لدينا معادلة (Δ) تعطى بالعبارة

$$(\Delta):\ y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

ولدينا $f'(1)=3$ و $f(1)=-2$

ومنه $(\Delta):\ y=3(x-1)-2$

$$\boxed{y=3x-5}$$

4- ب- اثبات أن $f(x)-(3x-5)=-(x-1)^3$

$$f(x)-(3x-5)=(-x^3+3x^2-4)-(3x-5)$$
$$=-x^3+3x^2+3x+1$$

ولدنا من جهة أخرى

$$-(x-1)^3=-(x-1)(x-1)^2$$
$$=-(x-1)(x^2+1-2x)$$
$$=-(x^3+x-2x^2-x^2-1+2x)$$
$$=-x^3+3x^2+3x+1$$

وبالتالي: $\boxed{f(x)-(3x-5)=-(x-1)^3}$

4- جـ- دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

لدراسة الوضع النسبي ندرس الفرق $f(x)-y$ أي

$$f(x)-y=f(x)-(3x-5)$$

من السؤال السابق لدينا: $f(x)-(3x-5)=-(x-1)^3$

ومنه ندرس إشارة العبارة $-(x-1)^3$

لدينا $-(x-1)^3=-(x-1)(x-1)^2$

ومنه إشارة $-(x-1)^3$ هي نفسها اشارة $-(x-1)$ لأن $(x-1)^2\geq 0$

المعادلة $-x+1=0$ لها حل وحيد هو 1 ومنه إشارة العبارة موجبة على يسار الحل وسالبة على يمينه أي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الوضعية

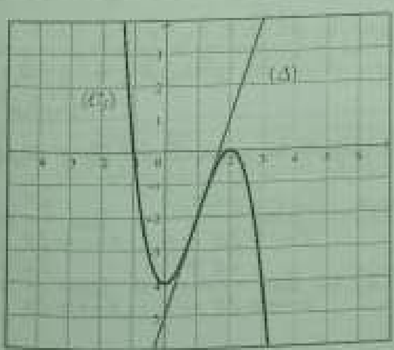
(C_f) فوق (Δ) اذا كان $x<1$

(C_f) تحت (Δ) اذا كان $x>1$

(Δ) يقطع (C_f) اذا كان $x=1$

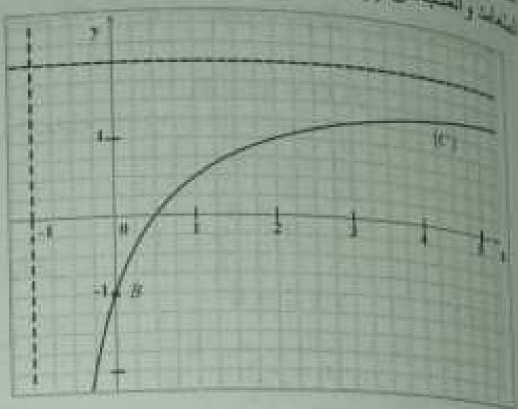
5- انشاء (Δ) و (C_f)

$$f(-1)=0$$



18- بكالوريا 2012 الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=2-\frac{a}{x+1}$ حيث a عدد حقيقي ، يرمز (C_f) الى التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ كما هو موضح أدناه



1- اعتمادا على التمثيل البياني (C_f) بين أن: $a=3$

2- أ- احسب النهايتين: $\lim\limits_{x \to -1^{+}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا

2-ب- احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على $]-1;+\infty[$

(f' الدالة المشتقة للدالة f)

3-أ- حل في المجال $]-1;+\infty[$ المعادلة: $f'(x)=\frac{3}{4}$

3-ب- (D) مستقيم معادلته: $y=\frac{3}{4}x-1$

اكتب معادلة للمستقيم (Δ) المماس للمنحنى (C_f) الذي يوازي المستقيم (D)

4- احسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم حل بيانيا المتراجحة $f(x)\geq 0$

الحل

f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x)=2-\frac{a}{x+1}$$

1- اثبات أن $a=3$

من البيان لدينا $f(0)=-1$ ومنه $2-a=-1$ أي $a=3$

ومنه

$$f(x)=2-\frac{3}{x+1}$$

2-أ- حساب النهايات

$$\lim_{x \to -1^{+}} f(x)=\lim_{x \to -1^{+}}\left(2-\frac{3}{x+1}\right)=2-\frac{3}{0^{+}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x+1}\right)=2-\frac{3}{+\infty}=2$$

التفسير الهندسي: المستقيمان ذو المعادلتين $x=-1$ و $y=2$ مستقيمان مقاربان لـ (C_f)

2-ب- حساب المشتقة

f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$

$$f'(x)=\left(2-\frac{3}{x+1}\right)'=0-\frac{0(x+1)-1(3)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{-3}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

لدينا $(x+1)^2>0$ و $3>0$ ومنه $\frac{3}{(x+1)^2}>0$

ومنه $f'(x)>0$ أي f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2

3-أ حل المعادلة $f'(x)=\frac{3}{4}$

$$f'(x)=\frac{3}{4}$$

تكافئ $\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{3}{4}$

ومنه $\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{4}{3}$

أي $x^2+2x+1=4$

وبالتالي $x^2+2x-3=0$

نقوم بحل المعادلة من الدرجة الثانية بحساب المميز Δ

$$\Delta=2^2-4(1)(-3)=16$$

للمعادلة حلان هما

$x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=\boxed{1}$ $\quad$ $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=\boxed{-3}$ مرفوض

3-ب- كتابة معادلة المستقيم (Δ)

(Δ) مماس (C_f) يوازي (D) أي لهما نفس معامل التوجيه

معامل التوجيه للمماس = المشتقة

أي $f'(x)=\frac{3}{4}$

من السؤال السابق لدينا للمعادلة حلان هما $x_1=1$ مقبول و $x_2=-3$ مرفوض لأنه خارج مجال تعريف f

ومنه (Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ومنه

$$(\Delta):\ y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$(\Delta):\ y=\frac{3}{4}(x-1)+\frac{1}{2}$$

$$\boxed{(\Delta): y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}$$

4- حساب $f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2-\frac{3}{\frac{1}{2}+1}=2-\frac{3}{\frac{3}{2}}=2-\frac{6}{3}=0$$

حل المتراجحة $f(x)\geq 0$ من البيان هو $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

19- بكالوريا 2011 الموضوع الأول

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x+2}{x-2}$$

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها ، ثم استنتج ان (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكل منهما

2-احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها

3-شكل جدول تغيرات الدالة f

4-عين احداثيات نقط تقاطع المنحنى(C) مع محوري الاحداثيات

5-اكتب معادلة لــ (Δ) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 4

6-أنشئ (Δ) و (C)

الحل

1-حساب نهايات الدالة f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x-2}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\<}} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{(2)+2}{(2)-2}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\>}} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{(2)+2}{(2)-2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

استنتاج معادلتي المستقيمين المقاربين

$$y=1$$

مستقيم مقارب أفقي

$$x=2$$

مستقيم مقارب عمودي

2-حساب $f'(x)$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-v'u}{u^2}$$

$$f'(x)=\frac{1(x-2)-1(x+2)}{(x-2)^2}$$

هذا يكافئ

$$f'(x)=\frac{x-2-x-2}{(x-2)^2}$$

ومنه

$$f'(x)=\frac{-4}{(x-2)^2}$$

دراسة إشارة $f'(x)$

البسط $-4<0$

المقام $(x-2)^2>0$ على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

ومنه

$$f'(x)<0$$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

3-جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

4-تعيين نقط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل (xx')

أي

$$f(x)=y=0$$

نحل المعادلة

$$f(x)=0$$

$$\frac{x+2}{x-2}=0$$

هذا يكافئ

$$x+2=0$$

ومنه

$$x=-2$$

ومنه

$$(C)\cap(xx')=A(-2,0)$$

تعيين نقط تقاطع المنحنى (C) مع محور التراتيب (yy')

أي

$$x=0$$

نحسب $f(0)$

$$f(0)=\frac{(0)+2}{(0)-2}=\frac{2}{-2}=-1$$

ومنه

$$y=-1$$

ومنه

$$(C)\cap(yy')=B(0,-1)$$

5-كتابة معادلة المماس (Δ) عند $a=4$

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

هذا يكافئ

$$y=f'(4)(x-4)+f(4)$$

حساب $f'(4)$

$$f'(4)=\frac{-4}{(4-2)^2}=\frac{-4}{(2)^2}=-1$$

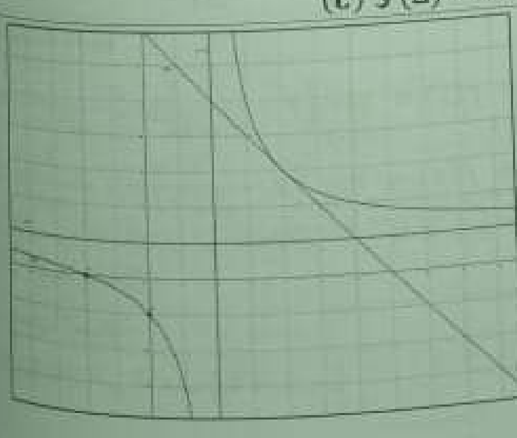
بالتعويض في معادلة المماس نجد

$$y=-1(x-4)+3$$

ومنه

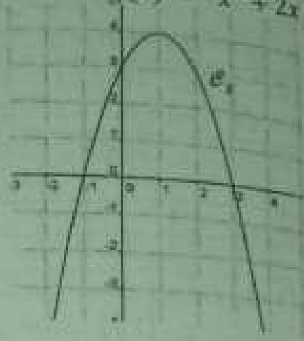
$$y=-x+7$$

6-انشاء (Δ) و (C)



20- بكالوريا 2011 الموضوع الثاني

في الشكل المقابل ، (C_g) هو التمثيل البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = -x^2 + 2x + 3$



بقراءة بيانية:

1- شكل جدول تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

2- عين حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- بين أن: $f'(x) = -g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$

2- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

3- احسب $f(-1)$ ، $f(3)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4- بين انه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي 5

5- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = g(x)$ ثم استنتج احداثيات نقط تقاطع المنحنيين C_g و C_f

---

الحل

حل الجزء أ:

1-جدول تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

2-تعيين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	0	−	

حل الجزء ب:

1-البرهان أن $f'(x) = -g(x)$

لدينا $-g(x) = x^2 - 2x - 3$

ولدينا $f'(x) = \frac{1}{3}(3)x^2 - 2x - 3$

هذا يكافئ $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

ومنه $f'(x) = -g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$

بما أن $f'(x) = -g(x)$ أي إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty,-1]$ و $[3,+\infty[$ ومتناقصة على $[-1,3]$

2-حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$$

3-حساب $f(-1)$ و $f(3)$

لدينا $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 3$

هذا يكافئ $f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 6$

ومنه $f(-1) = \frac{14}{3}$

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 3(3) + 3$$

هذا يكافئ $f(3) = \frac{27}{3} - 9 - 9 + 3$

ومنه

$$f(3) = -6$$

جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{14}{3}$	↘	-6	↗	$+\infty$

4-البرهان أنه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي 5

نحل المعادلة: $f'(x) = 5$

هذا يكافئ: $x^2 - 2x - 3 = 5$

ويكافئ:

$$x^2 - 2x - 3 - 5 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

و هي معادلة من الدرجة الثانية نحلها بالمميز Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36$$

ومنه

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

للمعادلة حلان متمايزان

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-6}{2(1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+6}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

ومنه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي 5 عند النقطتين ذات الفاصلتين -2 و 4

5-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=g(x)$

معناه $f(x)=g(x)$

$$\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3=-x^2+2x+3$$

ومنه $\frac{1}{3}x^3-3x=2x$

أي $\frac{1}{3}x^3-5x=0$

ومنه حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

هي نفسها حلول معادلة $\frac{1}{3}x^3-5x=0$

ومنه $\left(x\left(\frac{1}{3}x^2-5x\right)\right)=0$

ومنه $x=0$ أو $x^2-15=0$

$x=0$ أو $x^2=15$

أي $x=0$ أو $x=\sqrt{15}$ أو $x=-\sqrt{15}$

ومنه حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

هم $S=\{0,\sqrt{15},-\sqrt{15}\}$

وعليه نقط تقاطع (Cg) و (C_f) هي $A(0;g(0))$

$C\left(-\sqrt{15};g(-\sqrt{15})\right)$ ، $B\left(\sqrt{15};g(\sqrt{15})\right)$

21- بكالوريا 2010 الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2-ادرس اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3-بين ان النقطة $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

4-اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة I

5-تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=(x-1)^2(2x-5)$$

ثم استنتج نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

6-ارسم (Δ) و (C_f)

الحل

1-حساب النهايات

نقوم بالتعويض في أكبر حد $2x^3$ ونكتب

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x^3)=2(+\infty)^3=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=2(-\infty)^3=-\infty$$

2-دراسة تغيرات الدالة f

حساب المشتقة $f'(x)$

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$$
$$f'(x)=2\times3x^2-9\times2x+12+0$$

ومنه

$$f'(x)=6x^2-18x+12$$

إشارة المشتقة $f'(x)$

$$6x^2-18x+1=0$$

معادلة من الدرجة الثانية نحلها بالمميز

$$\Delta=b^2-4\,ac$$

هذا يكافئ

$$\Delta=(-18)^2-4\,(6)(12)$$
$$\Delta=324-24(12)=36$$

إذن

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{36}=6$$

المعادلة لها حلان متمايزان

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-18)-6}{2(6)}=\frac{12}{12}=1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-18)+6}{2(6)}=\frac{24}{12}=2$$

جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$

ومتناقصة على المجال $[1,2]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

حيث

$$f(1)=2(1)^3-9(1)^2+12(1)-5$$
$$f(1)=2-9+12-5$$

ومنه

$$f(1)=0$$
$$f(2)=2(2)^3-9(2)^2+12(2)-5$$
$$f(2)=16-36+24-5$$

ومنه

$$f(2)=-1$$

3-البرهان أن النقطة I نقطة انعطاف لـ (C_f)

يقبل (C_f) نقطة انعطاف إذا كانت المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم وتغير اشارتها

لدينا

$$f'(x)=6x^2-18x+12$$
$$f''(x)=6(2)x-18+0$$

ومنه

$$f''(x)=12x-18$$

ولدينا

$$f''(x)=0$$
$$12x-18=0$$

هذا يكافئ

$$12x=18$$

ويكافئ

$$x=\frac{18}{12}$$

ومنه

$$x=\frac{3}{2}$$

جدول إشارة $f''(x)$

x	$+\infty$	$\frac{3}{2}$
$f''(x)$	$-$	0

ومنه نقطة انعطاف لـ (C_f) عند $x = \frac{3}{2}$

حساب احداثيات I

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{2}\right) - 5$$

هذا يكافئ

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{27}{8}\right) - \frac{81}{4} + \frac{36}{2} - 5$$

توحيد المقامات

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{72}{4} - \frac{20}{4} = \frac{27 - 81 + 72 - 20}{4}$$

ومنه

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

احداثيات النقطة I هي

$$I\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

معادلة المماس (Δ) عند النقطة I

لدينا

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

هذا يكافئ

$$y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$

حساب $f'\left(\frac{3}{2}\right)$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{54}{2} + 12 = \frac{27}{2} - 17$$

ومنه

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-7}{2}$$

بالتعويض في معادلة المماس تصبح

$$y = \frac{-7}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

هذا يكافئ

$$y = \frac{-7}{2}x + \frac{21}{4} - \frac{1}{2}$$

ومنه معادلة المماس (Δ) هي

$$y = \frac{-7}{2}x + \frac{19}{4}$$

5-التحقق أن $f(x) = (x-1)^2(2x-5)$

لدينا

$$f(x) = (x-1)^2(2x-5)$$
$$= (x-1)(x-1)(2x-5)$$

نقوم بالنشر

$$f(x) = (x^2 - x - x + 1)(2x - 5)$$

هذا يكافئ

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(2x - 5)$$

ومنه

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x^2 + 10x + 2x - 5$$
$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

استنتاج نقط التقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$(C_f) \cap (xx')$

معادلة محور الفواصل هي $y = 0$ أي $f(x) = 0$ ونكتب

$f(x) = (x-1)^2(2x-5) = 0$

هذا يكافئ

لدينا

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ \text{أو} \\ 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

هذا يكافئ $(x-1)^2 = 0$

ومنه $x - 1 = 0$

ولدينا $x = 1$

هذا يكافئ $x - 5 = 0$

ومنه $2x = 5$

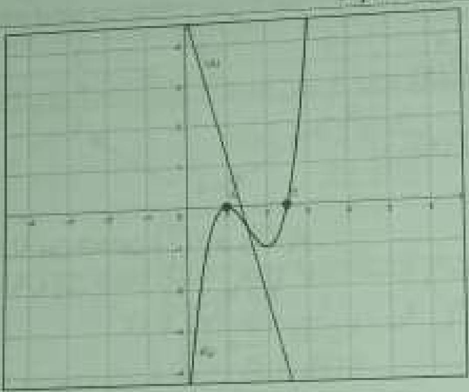
$x = \frac{5}{2}$

ومنه نقط التقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل هي

$A(1,0)$

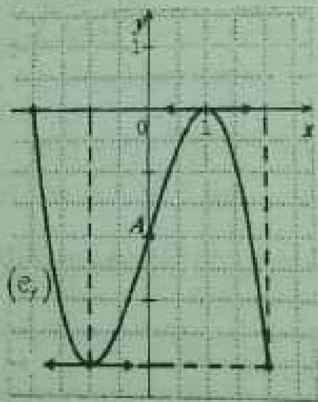
$B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

رسم (Δ) و (C_f)



22- بكالوريا 2010 الموضوع الثاني

f دالة عددية معرفة على المجال $[-2;2]$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس



انظر الشكل وأجب عن الأسئلة التالية

1-أ-عين $f'(1)$ و $f'(-1)$ (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

1-ب-عين صورتي العددين (-2) و(-1) بواسطة الدالة f

1-جـ-شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-2;2]$

2-باستعمال اتجاه تغير الدالة f ، قارن العددين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ و $f(\sqrt{3})$

A-3 هي النقطة من المنحنى (C_f) التي احداثياها $(0;-2)$ ، وبفرض ان $f'(0)=3$ ، اشرح كيف يمكن رسم مماس المنحنى (C_f) في النقطة A ثم ارسمه بعد نقل الشكل

الحل

1-أ – تعيين $f'(1)$ و $f'(-1)$

بما أن الدالة المشتقة تنعدم عند القيم الحدية العظمى و الدنيا المحلية فإن العدد المشتق ينعدم هناك أي

$$f'(-1)=0$$

و

$$f'(1)=0$$

وأيضا المماس يكون أفقيا (موازيا لمحور الفواصل)

1-ب- تعيين صورتي العددين (-2) و (-1)

$$f(-2)=0$$
$$f(-1)=-4$$

1-جـ جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-2,2]$

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-4	↗	0	↘	-4

2-المقارنة بين العددين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ و $f(\sqrt{3})$

$$\sqrt{3}=1.73$$
$$\frac{3}{2}=1.5$$

إذن $1<\frac{3}{2}<\sqrt{3}$

لكن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1,2]$ فإن

$$f(1)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f(\sqrt{3})$$

ومنه $f(\sqrt{3})<f\left(\frac{3}{2}\right)$

3-شرح كيف يمكن رسم (Δ)

نقوم بحساب معادلته الديكارتية

لدينا $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ولدينا $A(0,-2)$ اذن

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

ومنه معادلة (Δ) هي $y=3x-2$

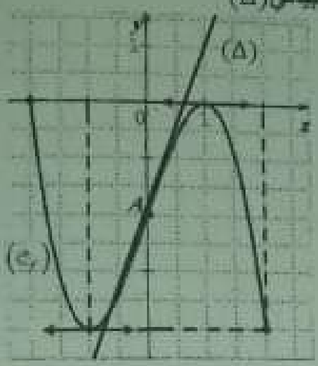
رسم (Δ)

نقوم بإعطاء قيمة لـ x فنجد y

x	0	1
y	-2	1

ومنه المماس يخترق (C_f) في النقطة $A(0,-2)$ أي A تمثل نقطة انعطاف

الرسم البياني(Δ)



23- بكالوريا 2009 الموضوع الأول

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البيان في مستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1-بين أن الدالة f تكتب على الشكل : $f(x)=1+\frac{a}{x+1}$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه

2-احسب نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ و (-1) ، ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا

3-احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f

4-اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f)عند النقطة التي فاصلتها 3

5-عين احداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملي محور الإحداثيات

6-ارسم كلا من (Δ) و (C_f)

الحل

1-تبيان أن الدالة f تكتب على الشكل $f(x)=1+\frac{a}{x+1}$

لدينا

$$f(x)=\frac{x-3-1+1}{x+1}$$
$$=\frac{(x+1)-4}{x+1}$$
$$=\frac{x+1}{x+1}-\frac{4}{x+1}$$
$$=1-\frac{4}{x+1}$$

بالمطابقة نجد $a=-4$

2-حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ و -1

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x+1}\right)=1$$

لأن $\left(a\text{ ثابت}\right)$ $\lim_{u\to+\infty}\frac{a}{u}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x+1}\right)=1$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{x-3}{x+1}=+\infty$$

لأن

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}x-3=-4$$

و

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}x+1=0^-$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=-\infty$$

x	$-\infty$	-1		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-3}{x+1} = -\infty$$

لأن $\lim_{x \to -1} x-3 = -4$

و $\lim_{x \to -1} x+1 = 0^{+}$

التفسير: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 1$ والآخر $x = -1$

حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x-3)'(x+1) - (x+1)'(x-3)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{4}{(x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

تعيين معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات فاصلة 3

$$(\Delta): y = f'(3)(x-3)f(3)$$

لدينا $f(3) = 0$ و $f'(3) = \frac{4}{(3+1)^2} = 1$

ومنه $(\Delta): y = x - 3$

إحداثي نقطة تقاطع (C_f) مع حاملي محور الأحداثيات

مع محور الفواصل أي $f(x) = 0$

$$\frac{x-3}{x+1} = 0$$

ومنه $x - 3 = 0$

وعليه $x = 3$

ومنه احداثيات تقاطع (C_f) مع محور الفواصل هي $(3;0)$

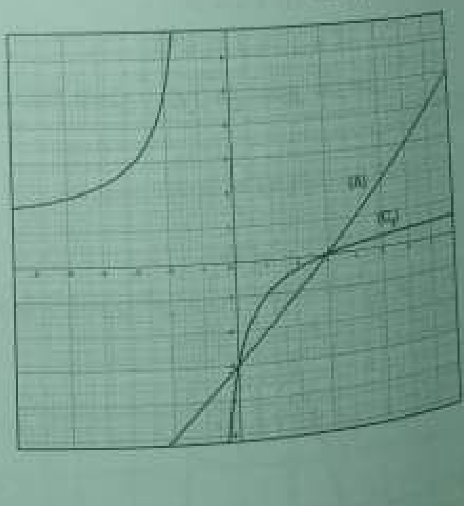
مع محور التراتيب أي $x = 0$

$$f(0) = \frac{0-3}{0+1} = -3$$

ومنه احداثيات تقاطع (C_f) مع محور التراتيب هي $(0;-3)$

6-الرسم (Δ) و (C_f)

حيث $(\Delta): y = x - 3$



24- بكالوريا 2009 الموضوع الثاني

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = -2 + \frac{3}{x-2}$$

-كل سؤال من الأسئلة الخمسة التالية يتضمن إجابة واحدة صحيحة ، تعرف عليها ، مع التبرير

س1-يمكن كتابة الدالة f على الشكل:

1) $f(x) = \frac{7+2x}{x-2}$ 2) $f(x) = \frac{-2x+7}{x-2}$ 3) $f(x) = \frac{-2x-7}{x-2}$

س2-f' مشتقة الدالة f على المجال $]2;+\infty[$ وعبارتها $f'(x)$ هي:

1) $f'(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$ 2) $f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$ 3) $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$

س3-نهاية $f(x)$ عند $(+\infty)$ هي:

1) $+\infty$ 2) $+3$ 3) -2

س4-المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته هي:

1) $x = 2$ 2) $x = 3$ 3) $y = 2$

س5-المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 3$ معادلته هي:

1) $y = -\frac{1}{3}x + 10$ 2) $y + 3x - 10 = 0$ 3) $y = 3x - 10$

الحل

س1-يمكن كتابة f على الشكل: 2) $f(x) = \frac{-2x+7}{x-2}$

لأن: $f(x) = -2 + \frac{3}{x-2}$

$$= \frac{-2(x-2)+3}{x-2}$$

$$= \frac{-2x+7}{x-2}$$

س-2-f' مشتقة الدالة f على المجال $]2,+\infty[$ وعبارتها $f'(x)$ هي: 3) $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$

لأن $f'(x) = (-2)' + \frac{(3)'(x-2)-(x-2)'\times 3}{(x-2)^2}$

$$= 0 + \frac{0-3}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$$

س3-نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ هي 3) -2

لأن $\lim_{x \to +\infty} \left(-2 + \frac{3}{x-2}\right) = -2 + 0 = -2$

لأن $\lim_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$ و $\lim_{u \to +\infty} \frac{3}{u} = 0$

س4-(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته: 1) $x = 2$

لأن $\lim_{x \to 2^{>}} f(x) = \lim_{x \to 2^{>}} \frac{-2x+7}{x-2} = +\infty$

لأن $\lim_{x \to 2^{>}} -2x + 7 = 3$

و $\lim_{x \to 2^{>}} x - 2 = 0^{+}$

س5-(C_f) يقبل مماس عند الفاصلة x_0 معادلته:

2) $y + 3x - 10 = 0$

لأن $y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$$= -\frac{3}{(3-2)^2}(x-3) + \frac{-2(3)+7}{3-2}$$

$$= -3x + 9 + 1 = -3x + 10$$

$$y + 3x - 10 = 0$$

25- بكالوريا 2008 الموضوع الأول

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^3 - 3x$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1-احسب $f(-1)$ ،$f(-2)$

2-أ-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2-ب-احسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها

2-جـ- شكل جدول تغيرات الدالة f

3-أ-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$

3-ب-استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يطلب تعيين احداثيي كل منها

3-جـ-اكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0

ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) - ماذا تستنتج؟

3-د-ارسم (C_f)و(Δ)

الحل

1-حساب $f(-2)$ و $f(-1)$

حساب $f(-2)$

لدينا

$$f(x) = x^3 - 3x$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)$$
$$f(-2) = -8 + 6$$
$$f(-2) = -2$$

حساب $f(-1)$

لدينا

$$f(x) = x^3 - 3x$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)$$
$$f(-1) = -1 + 3$$
$$f(-1) = 2$$

2-أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

نقوم بالتعويض في أكبر حد x^3 ونكتب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)^3 = +\infty$$

2-ب - حساب $f'(x)$

لدينا $f(x) = x^3 - 3x$

ومنه $f'(x) = 3x^2 - 3$

إشارة $f'(x)$

إشارة $3x^2 - 3$ وهي معادلة من الدرجة الثانية نحسبها بالمميز Δ

$$\Delta= b^2 - 4\,ac$$

هذا يكافئ $\Delta= (0)^2 - 4\,(3)(-3)$

ومنه $\Delta= 36$

$$\sqrt{\Delta}= \sqrt{36} = 6$$

المعادلة لها حلان

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 - 6}{2(3)} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 + 6}{2(3)} = +1$$

جدول الاشارة

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$3x^2 - 3$		+	0	−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty,-1] \cup [+1,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-1,1[$

3-جـ – جدول التغيرات للدالة f

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

حيث

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$
$$f(1) = (1)^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$$

3-أ – حل المعادلة $f(x) = 0$

لدينا

$$x^3 - 3x = 0$$

نقوم باستخراج x كعامل مشترك تصبح

$$x(x^2 - 3) = 0$$

هذا يكافئ

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

إذا $x^2 - 3 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية نحلها بمميز Δ

$$\Delta= b^2 - 4\,ac$$
$$\Delta= (0)^2 - 4\,(1)(-3)$$

ومنه

$$\Delta= 12$$
$$\sqrt{\Delta}= \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

المعادلة لها حلان

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 - 2\sqrt{3}}{2(1)} = -\sqrt{3}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 + 2\sqrt{3}}{2(1)} = \sqrt{3}$$

ومنه

$$S = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$$

3-ب – نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

لدينا

$$f(x) = 0$$

أي

$$y = 0$$

وهي معادلة محور الفواصل إذا نقاط التقاطع هي

$$A(-\sqrt{3}, 0)$$
$$B(0,0)$$
$$C(\sqrt{3}, 0)$$

كتابة معادلة المماس (Δ) عند $x_0 = 0$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

ومنه يكون

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

حساب $f'(0)$ و $f(0)$

$$f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$$
$$f(0) = (0)^3 - 3(0) = 0$$

$$y = -3(x) + 0$$

ومنه معادلة المماس (Δ) عند $x_0 = 0$ هي

$$(\Delta): y = -3x$$

دراسة وضعية (C_f) و (Δ)

لدراسة الوضعية نعين إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y$$

ومنه يكون

$$f(x) - y = x^3 - 3x - (-3x) = x^3 - 3x + 3x$$

ومنه

$$f(x) - y = x^3$$

حل

$$x^3 = 0$$
$$x = 0$$

ومنه يكون

جدول الإشارة

x	$+\infty$	0	$-\infty$
x^2	$+$	0	$+$
$1x$	$-$	0	$+$
x^3	$-$	0	$+$
الوضعية (C_f) و (Δ)	يقع (C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	يقع (C_f) فوق (Δ)

الاستنتاج

نستنتج أن (Δ) يخترق المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (0)

3د-رسم (C_f) و (Δ)

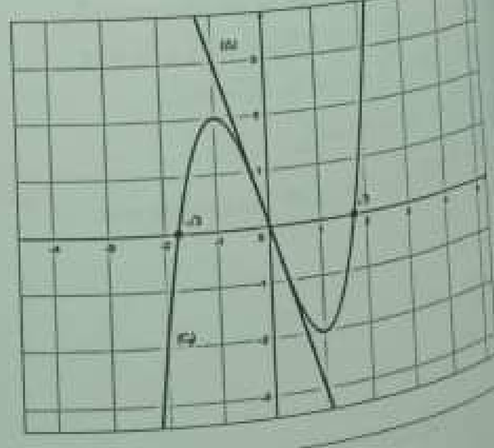
نعين نقطتين لرسم (Δ) حيث نعطي قيمة لـ x فنجد y ونكتب

x	0	$\frac{1}{3}$
y	0	-1

ولدينا نقط التقاطع هي:

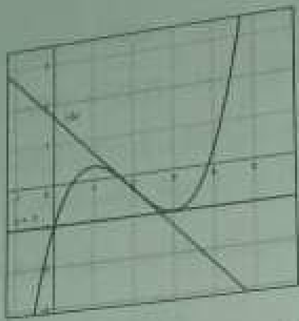
$$A(-\sqrt{3}, 0)$$
$$B(0,0)$$
$$C(\sqrt{3}, 0)$$

الرسم البياني



26- بكالوريا 2008 الموضوع الثاني

المنحنى (C) المرسوم في الشكل المقابل هو لدالة f معرفة على المجال $]-1, +\infty[$ ومماس المنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 2



1-خمن نهاية f عند $+\infty$ ثم بقراءة بيانية عين اتجاه تغير f على المجال $]-1, +\infty[$ شكل جدول تغيرات f

2-من العبارات الآتية:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$
$$f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$
$$f_3(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

عين العبارة المناسبة للدالة f مبررا ذلك

3-ادرس تغيرات الدالة f ،هل تخميناتك وقراءتك السابقة صحيحة؟

4-عين معادلة للمستقيم (Δ)

5-عين احداثيي نقطة الانعطاف للمنحنى (C)

6-ارسم المستقيم $y = -1$ ، ثم حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x) < -1$

7-عين نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة: $y = 3x - 1$

نص الإجابة

1-تخمين نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

تعيين اتجاه تغير f على المجال $]-1, +\infty[$

الدالة f متزايدة على المجال $[-1,1]$ ومتناقصة على المجال $[1,3]$ ومتزايدة على المجال $]3, +\infty[$

جدول الإشارة

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات f

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-6{,}33$	↗	$\frac{1}{3}$	↘	-1	↗	$+\infty$

2-تعيين العبارة المناسبة للدالة f

من البيان نعلم أن صورة العدد 0 بالدالة f هي -1 أي

$$f(0) = -1$$

إذا نقوم بالتأكد من صورة العدد 0 في الدوال f_1 ، f_2 و f_3

لدينا

$$f_1(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) + 1 = 1$$

$$f_2(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 1 = -1$$

$$f_3(0) = -\frac{1}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 1 = -1$$

نلاحظ أن f_2 و f_3 كلاهما يحققان القيمة $f(0) = -1$ لذلك نحتاج للمشتقة

من البيان مشتقة الدالة f تنعدم عند القيمة الحدية العظمى أو الصغرى أي

$$f'(1) = 0$$

إيجاد المشتقتين f_2' و f_3'

$$f_2'(x) = \frac{1}{3}(3)x^2 - 2(2)x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$f_3'(x) = -\frac{1}{3}(3)x^2 - 2(2)x + 3 = -x^2 - 4x + 3$$

حساب صورة العدد 1 بالمشتقتين f_2' و f_3'

$$f_2'(1) = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$f_3'(1) = -(1)^2 - 4(1) + 3 = -1 - 4 + 3 = -2$$

بما أن f_2' هي التي حققت $f'(1) = 0$ فإن العبارة المناسبة للدالة f هي

$$f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

3-دراسة تغيرات الدالة f

حساب f'

لدينا

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3)x^2 - 2(2)x + 3$$

ومنه

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

إشارة f'

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية نحسبها بالمميز

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

هذا يكافئ $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3)$

ويكافئ

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

ومنه

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

المعادلة لها حلان متمايزان

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - 2}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + 2}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

جدول إشارة f' :

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

الدالة f متزايدة على المجال $[3, +\infty[$ و $[-1,1]$

ومتناقصة على المجال $[-1,3]$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

إذن التخمين صحيح لأن له نفس القيم ونفس تغيرات f

4-تعيين معادلة (Δ)

من البيان نلاحظ أن المستقيم (Δ) مماس عند النقطة ذات الفاصلة $x = 2$

فتصبح معادلة المماس كالتالي

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

لنحسب $f(2)$ و $f'(2)$

$$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - 2(2)^2 + 3(2) - 1 = \frac{8}{3} - 8 + 6 - 1$$

$$= -\frac{1}{3}$$

$$f'(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = 7 - 8$$

$$= -1$$

نقوم بالتعويض في معادلة المماس نجد

$$y = -1\,(x-2) - \frac{1}{3}$$

هذا يكافئ

$$y = -x + 2 - \frac{1}{3} = -x + \frac{5}{3}$$

ومنه معادلة (Δ) هي

$$y = -x + \frac{5}{3}$$

5-نقطة الانعطاف للمنحنى (C)

المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم وتغير اشارتها

لدينا $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$$f''(x) = 2x - 4$$

إذا $f''(x) = 0$

$$2x - 4 = 0$$

هذا يكافئ $2x = 4$

ومنه $x = \frac{4}{2} = 2$

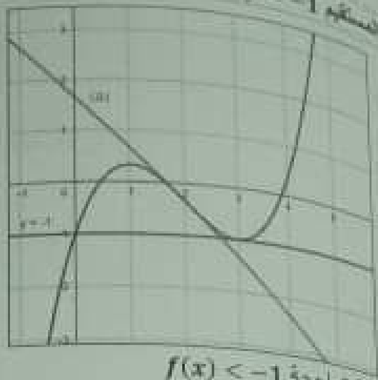
جدول إشارة f''

x	-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	

ومنه (C) يقبل نقطة انعطاف A حيث احداثياتها

$$A(2, f(2))$$

رسم المستقيم $y = -1$



حل البياني للمتراجحة $f(x) < -1$

يعني المجال الذي يكون فيه المنحنى (C) يقع تحت المستقيم $y=-1$

$S =]-1,0[$

تعيين نقاط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم $y = 3x - 1$

لدينا $f(x) = y$

$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 3x - 1$

ما يكافئ $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 = 0$

ما يكافئ

بإخراج x^2 كعامل مشترك تصبح

$x^2\left(\frac{1}{3}x - 2\right) = 0$

ما يكافئ
$$\begin{cases} x^2 = 0 \text{ أي } x = 0 \\ \text{أو} \\ \frac{1}{3}x - 2 = 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{3}x - 2 = 0$

ما يكافئ $\frac{1}{3}x = 2$

ومنه $x = 6$

لدينا الفاصلة $x = 0$ و $x = 6$ نقوم بالتعويض في $y = 3x - 1$ لإيجاد الترتيبة

$y = 3(0) - 1 = -1$

$y = 3(6) - 1 = 17$

ومنه إحداثيات نقطتي التقاطع هما

$B(0, -1)$

$C(6,17)$

مناقشة بيانيا حلول المعادلة $f(x) = m$

لدينا $f(x) = m$ هذا يكافئ $y = m$

- لما $m \in]-6.33, -1[$ يوجد حل وحيد سالب.
- لما $m = -1$ يوجد حلان $x = 0$ و $x = 3$.
- لما $m \in]-1, \frac{1}{3}[$ يوجد ثلاثة حلول.
- لما $m = \frac{1}{3}$ يوجد حلان.
- لما $m \in]\frac{1}{3}, +\infty[$ يوجد حل وحيد موجب.

باك 2021 عنواننا
للنجاح
BAC 2021

محور المتتاليات

ملخص شامل حول المتتاليات

01- تعريف المتتالية العددية

المتتالية العددية الحقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

$u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n)$

02- الترميز

نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$ هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل.

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى كذلك الحد العام للمتتالية u.

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

في الحد u_n، n هو دليل الحد وليس رتبته.

مثال: المتتالية (w_n) حيث أن $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة الحد u_b حيث $b \in \mathbb{N}$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو: العدد الطبيعي $b - a + 1$.

مثال: - إذا كانت المتتالية (u_n) حدها الأول u_0 فإن u_{14} يمثل الحد ذو الرتبة 15 لأنّ $14 - 0 + 1 = 15$

- إذا كانت المتتالية (v_n) حدها الأول v_1 فإن v_{14} يمثل الحد ذو الرتبة 14 لأنّ $14 - 1 + 1 = 14$

03- طرق تعريف المتتالية

• متتالية معرف حدها العام بدلالة دالة f مباشرة من الشكل $u_n = f(n)$

مثال: $U_n = 2n^2 + n - 1$ حيث: $F(x) = 2x^2 + x - 1$

• متتالية معرفة بصيغة تراجعية وهي على أنواع:

- متتالية تراجعية من المرتبة الأولى: $u_{n+1} = f(u_n)$ ويعطى معها الحد الأول

مثال: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 5u_n + 1$ لاحظ أن $f(x) = 5x + 1$

- متتالية تراجعية من المرتبة الثانية:

مثال: $u_1 = 5$ و $u_0 = 1$ و $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$

• تنبيه: توجد متتاليات من مراتب أعلى.

• متتالية معرفة بذكر القائمة الأولى من حدودها بحيث تسمح باستنتاج خاصيتها.

مثال (1): 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...متتالية الأعداد الفردية

مثال (2): 0, 3, 6, 9, 12, ...مضاعفات العدد 3

فالأولى هي (u_n) حيث $\begin{cases} u_n = 2n + 1 \\ n \in N \end{cases}$

أما الثانية هي (v_n) حيث: $\begin{cases} v_n = 3n \\ n \in N \end{cases}$

04- اتجاه تغير متتالية عددية

- متتالية متزايدة:

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$ على الترتيب).

- متتالية متناقصة:

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0:

$u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب).

- متتالية ثابتة:

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$، $u_{n+1} = u_n$.

- متتالية رتيبة:

إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة (رتيبة تماما على الترتيب).

05- كيفية دراسة اتجاه تغير متتالية (u_n)

الطريقة 01: من أجل كل عدد طبيعي n

- إذا كان: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$
- إذا كان: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$
- إذا كان: $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$

الطريقة 02: (u_n) مكتوبة بدلالة n أي $u_n = f(n)$

- إذا كانت f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ فإن (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.
- إذا كانت f متناقصة على المجال $[0; +\infty[$ فإن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.
- إذا كانت f ثابتة على المجال $[0; +\infty[$ فإن (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

ملاحظة: عكس الخاصية غير صحيح.

الطريقة 03: تستعمل إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماما

- إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإن (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.
- إذا كانت: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فإن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.
- إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ فإن (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

10-الإستدلال بالتراجع

مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n، n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

1- نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

2- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n + 1$ أي $P(n + 1)$.

3- **النتيجة :** عند انتهاء المرحلتين نقر أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

❖ **ملاحظة:** المراحل الثلاثة في الاستدلال بالتراجع ضرورية وغياب واحدة منها "مخل" بشروط عمله.

المتتاليات الحسابية

- تعريف: نقول أن (u_n) متتالية حسابية أساسها r (r عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = u_n + r$$

- عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_p وأساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $n \geq p$ و p يمثل رتبة الحد الأول يكون:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

حالة خاصة $u_n = u_0 + nr$ إذا كان حدها الأول هو u_0

- مجموع الحدود المتتابعة للمتتالية الحسابية

بصفة عامة:

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \left(\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}\right)$$

$$S = (n-p+1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

مثال:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

- الوسط الحسابي:

إذا كانت a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة يسمى b وسط حسابي ويكون $2b = a + c$ ومنه نجد: $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$

- اتجاه تغير المتتالية الحسابية

(u_n) متتالية حسابية أساسها r :

- إذا كان $r > 0$ فإن (u_n) متزايدة تماما.
- إذا كان $r < 0$ فإن (u_n) متناقصة تماما.
- إذا كان $r = 0$ فإن (u_n) ثابتة.

- نهاية المتتالية الحسابية

(u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه:

1- إذا كان $r > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (متتالية متباعدة).

2- إذا كان $r < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (متتالية متباعدة).

3- إذا كان $r = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ (متتالية متقاربة).

المتتالية الهندسية

- تعريف: نقول أن (v_n) متتالية هندسية أساسها q عدد حقيقي غير معدوم) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

- عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية

إذا كانت (v_n) متتالية هندسي حدها الأول v_0 وأساها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $n \geq p$ و p يمثل رتبة الحد الأول يكون:

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

حالة خاصة $v_n = v_0 \times q^n$ إذا كان حدها الأول هو v_0

- مجموع الحدود المتتابعة للمتتالية الهندسية

إذا كانت (v_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:
بصفة عامة

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \left(\frac{1 - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}\right)$$

$$S = (v_p) \times \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

مثال:

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n = v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

حالة خاصة إذا كان $q = 1$ فإن:

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n = (n+1)v_0$$

- الوسط الهندسي:

إذا كانت a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة يسمى b وسط هندسي ويكون $b^2 = ac$ ومنه نجد: $v_n^2 = v_{n-1} \times v_{n+1}$

- اتجاه تغير المتتالية الهندسية

(v_n) متتالية هندسية أساسها q :

الحالة الأولى: $q > 1$
- إذا كان $v_0 > 0$ فإن (v_n) متزايدة تماما.
- إذا كان $v_0 < 0$ فإن (v_n) متناقصة تماما.

الحالة الثانية: $q = 1$ فإن (v_n) متتالية ثابتة.

الحالة الثالثة: $0 < q < 1$
- إذا كان $v_0 > 0$ فإن (v_n) متناقصة تماما.
- إذا كان $v_0 < 0$ فإن (v_n) متزايدة تماما.

الحالة الرابعة: $q < 0$ فإن (v_n) ليست رتيبة لا يمكن دراستها

- نهاية متتالية هندسية

(v_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه:

1- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (متتالية متقاربة).

2- إذا كان $q = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0$ (متتالية متقاربة).

3- إذا كان $q > 1$ فإنه:
- إذا كان $v_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (متتالية متباعدة).
- إذا كان $v_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ (متتالية متباعدة).

4- إذا كان $q \leq -1$ النهاية غير موجودة. (متتالية متباعدة)

تمرين تدريبي 01:

نعتبر المتتالية الهندسية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$

1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

2) ادرس اتجاه تغير (v_n) واستنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها.

3) احسب بدلالة n الجداء p_n:

$$p_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

الحل:

1- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية

تكون (v_n) متتالية هندسية اذا كان

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

$$v_{n+1} = 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} = 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$v_{n+1} = v_n \times \frac{5}{6}$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$ وحدها الأول

$$v_0 = 5\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 5$$

$$v_n = 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

2- دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n):

ندرس اشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} - 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$

$$= 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\left(\frac{5}{6}\right) - 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$

$$= 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\left[\frac{5}{6} - 1\right]$$

$$= 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\left[\frac{5-6}{6}\right]$$

$$= 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\left(-\frac{1}{6}\right) < 0$$

ومنه (v_n) متتالية متناقصة تماما

استنتاج أن (v_n) متتالية متقاربة

بما أن (v_n) متتالية هندسية وأساسها يحقق $-1 < q < 1$ فهي متقاربة

حساب النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} 5\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad -1 < \frac{5}{6} < 1$$

3-حساب الجداء p_n بدلالة n:

$$p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

لدينا

$$v_n = v_0 q^n$$

بالضرب طرف لطرف نجد

$$\begin{cases} n = 0\ ; & v_0 = v_0 \\ n = 1\ ; & v_1 = v_0 q \\ n = 2\ ; & v_2 = v_0 q^2 \\ \vdots & \\ n = n\ ; & v_n = v_0 q^n \end{cases}$$

$$p_n = v_0 (v_0 q)(v_0 q^2) \times \dots \times (v_0 q^n)$$

$$p_n = v_0^{n+1}(q \times q^2 \times q^3 \times \dots \times q^n)$$

$$p_n = (5)^{n+1}\left[\left(\frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \dots \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]$$

$$p_n = (5)^{n+1}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{\overbrace{1+2+3+\dots+n}^{\text{مجموع متتالية حسابية}}}\right]$$

$$p_n = (5)^{n+1}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$$

تمرين تدريبي 02:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -2$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = u_n - 3n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_{n+1} - u_n$

- اثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

الحل

بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ اذا حدها الأول هو v_0، $v_0 = u_1 - u_0$

$u_1 = u_0 - 3(0) + 1 = -1$ ومنه

$v_0 = u_1 - u_0 = -1 - (-2) = 1$

لنحسب $v_{n+1} - v_n$

لدينا $u_{n+1} - u_n = -3n + 1$

اذن $v_n = -3n + 1$

$v_{n+1} - v_n = -3(n+1) + 1 - (-3n + 1) = -3$

اذن من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} - v_n = -3$

ومنه المتتالية v_n متتالية حسابية أساسها $r = -3$ و $v_0 = 1$

1. تمرين مقترح وهام جدا 01

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول u_0 وأساسها r

1- علما أن: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$، عين u_1

2- علما أن: $2u_0 - 3u_1 = -10$، عين الحد الأول u_0، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية (u_n)

3- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

4-أ- عين قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$

ب- أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n)

5- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

6- عين العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = 96$

الحل

1- تعيين u_1

لدينا $u_0 + u_1 + u_2 = 6$

ولدينا حسب الوسط الحسابي $u_0 + u_2 = 2u_1$

ومنه

$$u_1 + 2u_1 = 6$$
$$3u_1 = 6$$
$$u_1 = 2$$

2- تعيين u_0

لدينا $2u_0 - 3u_1 = -10$

ولدينا $u_1 = 2$ ومنه تصبح

$$2u_0 - 3(2) = -10$$

أي

$$2u_0 - 6 = -10$$

$$2u_0 = -4$$
$$u_0 = -\frac{4}{2}$$
$$u_0 = -2$$

- استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n)

نعلم أن $u_{n+1} - u_n = r$ في المتتالية الحسابية ومنه

$$u_1 - u_0 = r$$

ومنه

$$r = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$$

2-ب- كتابة عبارة الحد العام (u_n) بدلالة n

$$u_n = u_p + (n-p)r$$
$$u_n = u_0 + nr$$
$$\boxed{u_n = -2 + 4n}$$

4-أ- تعيين قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$

لدينا $u_n = 2018$

أي $-2 + 4n = 2018$

ومنه $4n = 2020$

$$n = \frac{2020}{4}$$

وبالتالي $\boxed{n = 505}$

4-ب- حساب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n)

بما أن أول حد للمتتالية (u_n) هو u_0 فإن الحد الخامس عشر هو u_{14}

$$u_{14} = -2 + 4(14)$$
$$u_{14} = 54$$

5- الحساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right]$$
$$S_n = \frac{n-0+1}{2}[u_0 + u_n] = \frac{n+1}{2}[-2-2+4n]$$
$$S_n = \frac{n+1}{2}[-4+4n] = \frac{n+1}{2}(2)(-2+2n)$$
$$S_n = (n+1)(-2+2n)$$

6- تعيين n حتى يكون $S_n = 96$

$$S_n = 96$$

أي

$$(n+1)(-2+2n) = 96$$
$$-2n - 2 + 2n^2 + 2n = 96$$
$$2n^2 = 98$$
$$n^2 = 49$$

ومنه للمعادلة حلان هما

$$\begin{cases} n = \sqrt{49} = 7 \\ n = -\sqrt{49} = -7 \quad \text{مرفوض} \end{cases}$$

(الحل الثاني مرفوض لأن -7 لا ينتمي للأعداد الطبيعية

ومنه قيمة n هي $n = 7$

2. تمرين مقترح وهام جدا 02

(u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0 = 2$ وبالعلاقة $u_2 + u_5 = 25$

1- عين أساس المتتالية الحسابية (u_n)

2- أكتب الحد العام u_n بدلالة n

3- أحسب قيمة الحد الذي رتبته 11

4- أحسب المجموع $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$

الحل

1- تعيين أساس المتتالية (u_n)

لدينا $u_0 = 2$ ولدينا

$$u_2 = u_0 + (2-0)r$$
$$u_2 = 2 + 2r$$

ولدينا

$$u_5 = u_0 + (5-0)r$$
$$u_5 = 2 + 5r$$

بتعويض قيمة كل من u_2 و u_5 في العبارة $u_2 + u_5 = 25$ تصبح

$$2 + 2r + 2 + 5r = 25$$
$$7r = 21$$
$$\boxed{r = 3}$$

2- كتابة الحد العام بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام $u_n = u_p + (n+p)r$

$$u_n = u_0 + nr$$
$$u_n = 2 + 3r$$

3- حساب قيمة الحد الذي رتبته 11

بما أن أول حد للمتتالية (u_n) هو u_0 فإن الحد الحادي عشر هو u_{10} ومنه $u_{10} = 2 + 3(10) = 32$

4-حساب المجموع S_n

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$$

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right]$$
$$S = \frac{10-1+1}{2}[u_1 + u_{10}]$$
$$S = 5[5 + 32] = 5(37) = 185$$

3. تمرين مقترح وهام جدا 03

(v_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $v_0 = 12$ وأساسها $q = 10$

1- أكتب v_n بدلالة n

2- أحسب حدها الثامن

3- أحسب مجموع العشرين حدا الأولى من هذه المتتالية

الحل

1- كتابة v_n بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام لمتتالية هندسية

$$v_n = v_p q^{n-p}$$

$$3^n = 3^4$$
$$n = 4$$

إذن

ومنه قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$ هي $n = 4$

2-بين البرهان بالتراجع أن العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

مرحلة التحقق:

نسمي $P(n)$ الخاصية $3^n - 1$

من أجل $n = 0$ أي

$$3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

العدد 0 يقبل القسمة على 2

أي أن $P(0)$ محققة

مرحلة الفرضية:

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل n أي $3^n - 1$ يقبل القسمة على العدد 2، أي

$$3^n - 1 = 2k \qquad : k \in \mathbb{N}$$
$$3^n = 2k + 1$$

مرحلة البرهان:

نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $3^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 2.

أي

$$3^{n+1} - 1 = 2k' \qquad : k' \in \mathbb{N}$$
$$3^{n+1} = 2k' + 1$$

لدينا

$$3^{n+1} - 1 = 3^n.3 - 1$$

ولدينا من الفرضية $3^n = 2k + 1$ نقوم بتعويضها نجد

$$3^{n+1} - 1 = (2k+1).3 - 1$$
$$3^{n+1} - 1 = 6k + 3 - 1$$
$$3^{n+1} - 1 = 6k + 2$$

نستخرج 2 كعامل مشترك تصبح

$$3^{n+1} - 1 = 2(3k+1)$$

ومنه

$$3^{n+1} - 1 = 2k'$$

لأن

$$k' = 3k + 1$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة من أجل $(n+1)$

وأخيرا العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

16. بكالوريا 2013 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

1-أحسب u_0

2-بين انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5n + 1$

3-عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$

4-أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$

5-المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة :

$$V_n = 2u_n + 1$$

5-أ-ادرس اتجاه تغير المتتالية (V_n)

ب-احسب المجموعة : $S' = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{2013}$

الحل

1-حساب u_0:

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هو:

حيث

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$
$$r = 5$$

ولدينا

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

أولا سنكتب الحدود u_1، u_2 و u_3 بدلالة u_0 وذلك باستعمال عبارة الحد العام:

$$u_1 = u_0 + (1-0)\,5 = u_0 + 5$$
$$u_2 = u_0 + (2-0)\,5 = u_0 + 10$$
$$u_3 = u_0 + (3-0)\,5 = u_0 + 15$$

نقوم بتعويض هذه الحدود بما يساويها كالتالي:

لدينا

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

بالتعويض تصبح:

$$u_0 + u_0 + 5 + u_0 + 10 + u_0 + 15 = 34$$

هذا يكافئ

$$4u_0 + 30 = 34$$

أي

$$4u_0 = 34 - 30$$

إذن

$$u_0 = \frac{4}{4} = 1$$

ومنه

$$u_0 = 1$$

2-بيان انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 5n + 1$:

نقوم بتعويض الحد الأول u_0 في عبارة الحد العام كالتالي:

لدينا

$$u_n = u_0 + (n-0)\,r$$

بتعويض $u_0 = 1$ والأساس $r = 5$ نجد

$$u_n = 1 + (n)\,5$$

ومنه

$$u_n = 5n + 1$$

3-تعيين العدد الطبيعي n بحيث:

$$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$$

لدينا

$$u_n = 5n + 1$$

نقوم بإضافة العدد 1 إلى n فتصبح

$$u_{n+1} = 5(n+1) + 1$$

نقوم بتعويض u_{n+1} و u_n في هذه العلاقة

$$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$$

بعد التعويض تصبح

$$5(n+1) + 1 + 5n + 1 - 8n = 4033$$

بعد النشر نجد

$$5n + 5 + 1 + 5n + 1 - 8n = 4033$$

وهذا يكافئ

$$10n - 8n + 7 = 4033$$

ويكافئ

$$2n = 4033 - 7$$

إذن

$$n = \frac{4026}{2} = 2013$$

ومنه

$$n = 2013$$

4-حساب المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$$

بما أن المتتالية حسابية فمجموعها يعطى بالعلاقة:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}\right]$$

هذا يكافئ

$$S = \frac{2013 - 0 + 1}{2}\left[u_0 + u_{2013}\right]$$

ويكافئ

$$S = \frac{2014}{2}\left[1 + u_{2013}\right]$$

لحساب u_{2013} نقوم باستعمال عبارة الحد العام كالتالي

$$u_{2013} = 5(2013) + 1 = 10166$$

إذن

$$S = \frac{2014}{2}\left[1 + 10166\right]$$

ومنه

$$S = 10137469$$

5-أ-دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n):

ندرس إشارة الفرق بين $v_{n+1} - v_n$

لدينا

$$v_n = 2u_n + 1$$

نقوم بإضافة 1 للعدد n في v_n وذلك قصد الحصول على v_{n+1} فتصبح

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1$$

بعد التعويض نجد $u_n = u_0 . 5^{n-0}$

ومنه $u_n = 2 . 5^n$

استنتاج v_n بدلالة n

لدينا $u_n = v_n + 1$

بتعويض $u_n = 2 . 5^n$ تصبح $2 . 5^n = v_n + 1$

ومنه $v_n = 2 . 5^n - 1$

2-جـ تحليل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية

نقوم بالقسمة على أصغر الأعداد الأولية وهو 2 إلى غاية أن نجد الفاصلة فننتقل إلى الذي يليه وهو 3 ثم 5 ثم 7 وهكذا إلى غاية الوصول للعدد 1 كالتالي:

$$\left(\begin{array}{r|l} 1250 & 2 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & . \end{array}\right)$$

ومنه $1250 = 2 \cdot 5^4$

استنتاج أن العدد 1250 حدا من حدود المتتالية (u_n)

لدينا $u_n = 1250$

هذا يكافئ $2 \cdot 5^n = 1250$

ونعلم أن $1250 = 2 \cdot 5^4$ فتصبح

$$2 \cdot 5^n = 2 \cdot 5^4$$

نختزل 2 مع 2 تصبح $5^n = 5^4$

بما أنه يتساوى عددان إذا تساوى أساسيهما نجد $n = 4$

وبما أن $n \in \mathbb{N}$ ينتمي للأعداد الطبيعية فإن العدد 1250 حدا من حدود المتتالية (u_n) رتبته $4 - 0 + 1 = 5$

3-أ- حساب بدلالة n المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

بما أن (u_n) متتالية هندسية فنطبق علاقة المجموع:

$$S_n = \text{الحد الأول للمجموع} \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

هذا يكافئ $S_n = u_0 \frac{5^{n-1-0+1} - 1}{5-1}$

ويكافئ $S_n = 2 \frac{5^n - 1}{4}$

إذن $S_n = 2 \frac{5^n - 1}{4}$

ومنه $S_n = \frac{1}{2}[5^n - 1]$

3-ب- حساب بدلالة n المجموع:

$$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

لدينا $u_n = v_n + 1$

بما أن مجموع المتتالية (u_n) هو S_n، ومجموع المتتالية (v_n) هو S'_n فتصبح العلاقة: $S_n = S'_n + 1(\text{عدد الحدود})$

هذا يكافئ $S_n = S'_n + 1(n - 1 - 0 + 1)$

ويكافئ $S_n = S'_n + n$

إذن $S'_n = S_n - n$

ومنه $S'_n = \frac{1}{2}[5^n - 1] - n$

15. بكالوريا 2013 الموضوع الأول

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3

1-أ-عبر عن v_n بدلالة n

1-ب-احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$ ثم استنتج تغير المتتالية (v_n)

2-نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

2-أ- احسب بدلالة n المجموع S_n

2-ب- عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$

2-جـ اثبت بالتراجع انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

الحل

1-أ- التعبير عن v_n بدلالة n

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n)

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

بتعويض الحد الأول والأساس نجد

$$v_n = v_0 \times 3^{n-0}$$

ومنه $v_n = 2 \times 3^n$

1-ب- حساب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$

لدينا $v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$

هذا يكافئ $v_{n+1} - V_n = 2 \times 3^n . 3 - 2 \times 3^n$

نستخرج 2×3^n كعامل مشترك تصبح

$$v_{n+1} - v_n = (2 \times 3^n)(3 - 1)$$

$$v_{n+1} - v_n = (2 \times 3^n)(2)$$

ومنه $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

لدينا $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$

بما أن $4 > 0$ و $3^n > 0$ فإن

$$v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n > 0$$

ومنه فالمتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

2-أ- حساب بدلالة n المجموع S_n

لدينا $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية، نحسبه بالعلاقة

$$S_n = \text{الحد الأول} \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

هذا يكافئ $S_n = 2 \frac{3^{n-1-0+1} - 1}{3-1}$

ومنه $S_n = 3^n - 1$

2-ب- تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$

لدينا $S_n = 80$

هذا يكافئ $3^n - 1 = 80$

$$3^n = 80 + 1$$

$$3^n = 81$$

نقوم بقسمة العدد 81 على 3 كالتالي

$$\left(\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & . \end{array}\right)$$

الحل

1- الحد العام للمتتالية (u_n):

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هو:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$

حيث r هو الأساس والشرط الذي يجب أن يكون محقق هو $n > p$

نقوم بالتعويض في عبارة الحد العام نجد

$$u_n = u_2 + (n-2)\,(3)$$

$$u_n = 1 + 3n - 6$$

هذا يكافئ

$$u_n = -5 + 3n$$

إذن

ومنه الإجابة هي: ج

2- المجموع $1+2+3+\dots+n$ يساوي:

نلاحظ أن المجموع $1+2+3+\dots+n$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 1 (لأن الفرق بين كل حدين متتاليين هو نفسه وهو 1)

ومجموع متتالية حسابية يعطى بالعبارة:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\,[\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}]$$

بالتعويض نجد: $S_n = \frac{n-1+1}{2}[1+n]$

إذن $S_n = \frac{n}{2}[1+n]$

بعد عملية النشر والتبسيط نجد: $S_n = \frac{n^2+n}{2}$

ومنه الجواب هو: أ

3- لدينا $x-2$ ، x ، $x+1$ بهذا الترتيب تكون حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

بما أن الأعداد $x-2$ ، x ، $x+1$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية فيمكننا تطبيق علاقة الوسط الهندسي.

إذا كان a و b و c حدود متتابعة فالوسط الهندسي لها هو:

$$b^2 = a.c$$

بالتعويض نجد $(x)^2 = (x-2).(x+1)$

هذا يكافئ $x^2 - x^2 - x + 2x + 2 = 0$

بعد التبسيط نجد $x + 2 = 0$

إذن $x = -2$

ومنه الجواب هو: ج

4- أساس المتتالية (v_n):

لدينا $v_n = 2\,.\,3^{n+1}$

بما أن المتتالية هندسية فيمكننا المطابقة مع عبارة الحد العام وهي: $v_n = v_p\,.\,q^{n-p}$

ومنه الأساس $q = 3$

الجواب هو: ب

14. بكالوريا 2014 الموضوع الثاني

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = 5v_n + 4$

1- احسب: v_1 ، v_2 و v_3

2- نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n = v_n + 1$

2-أ- بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$

2-ب- اكتب عبارة الحد العام لـu_n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n

2-جـ- حلل العدد 1250 الى جداء عوامل أولية واستنتج انه حد من حدود المتتالية (u_n)

3-أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

3-ب- احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

الحل

1- حساب v_1 ، v_2 و v_3:

حساب v_1:

لدينا

$$v_{n+1} = 5v_n + 4$$

نقوم بتعويض $n = 0$ نجد $v_{0+1} = 5v_0 + 4$

هذا يكافئ $v_1 = 5(1) + 4 = 9$

ومنه $v_1 = 9$

حساب v_2:

نقوم بتعويض $n = 1$ نجد $v_{1+1} = 5v_1 + 4$

هذا يكافئ $v_2 = 5(9) + 4 = 49$

ومنه $v_2 = 49$

حساب v_3:

نقوم بتعويض $n = 2$ نجد $v_{2+1} = 5v_2 + 4$

هذا يكافئ $v_3 = 5(49) + 4 = 249$

ومنه $v_3 = 249$

2-أ- البرهان أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$

تكون (u_n) متتالية هندسية إذا كان: $u_{n+1} = u_n\,.\,q$

لدينا $u_n = v_n + 1$

نضيف العدد 1 للعدد n تصبح $u_{n+1} = v_{n+1} + 1$

ولدينا $v_{n+1} = 5v_n + 4$ بالتعويض نجد

$$u_{n+1} = 5v_n + 4 + 1$$

هذا يكافئ $u_{n+1} = 5v_n + 5$

نستخرج العدد 5 كعامل مشترك تصبح

$$u_{n+1} = 5(v_n + 1)$$

ونعلم أن $u_n = v_n + 1$ بتعويضها نجد

$$u_{n+1} = u_n\,.5$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$

حساب الحد الأول u_0 للمتتالية (u_n):

لدينا $u_n = v_n + 1$

نقوم بتعويض $n = 0$ نجد $u_0 = v_0 + 1 = 1 + 1 = 2$

ومنه $u_0 = 2$

2-ب- كتابة u_n بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية هي

$$u_n = u_p\,.\,q^{n-p}$$

3-أ- حساب بدلالة n المجموع S_n

لدينا

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية ونكتب

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}\right]$$

وهذا يكافئ

$$S_n = \frac{n-1+1}{2}\left[u_1 + u_n\right]$$

ويكافئ

$$S_n = \frac{n}{2}\left[3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right]$$

ومنه

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\frac{17-5n}{2}\right]$$

3-ب- تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها

$$S_n = -\frac{657}{2}$$

$$\frac{n}{2}\left[\frac{17-5n}{2}\right] = -\frac{657}{2}$$

وهذا يكافئ

$$n\left[\frac{17-5n}{2}\right] = -657$$

نستعمل جداء الطرفين في جداء الوسطين نجد

$$n(17-5n) = -657\,(2)$$

وهذا يكافئ

$$-5n^2 + 17n = -1314$$

ويكافئ

$$-5n^2 + 17n + 1314 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a\cdot c = (17)^2 - 4(-5)(1314)$$

إذن

$$\sqrt{\Delta} = 163$$

لدينا حلين هما

$$\begin{cases} n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17-163}{2(-5)} = 18 \\ n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17+163}{2(-5)} = -30.9 \end{cases}$$

الحل $n_1 = 18$ مقبول لأنه ينتمي إلى الأعداد الطبيعية $n_1 \in \mathbb{N}$

أما الحل $n_2 = -30.9$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى الأعداد الطبيعية $n_2 \notin \mathbb{N}$

ومنه قيمة n حتى يكون $S_n = -\frac{657}{2}$ هي

$$n = 18$$

4-أ- التحقق أن $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$

لدينا

$$(n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n$$

ومنه

$$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

4-ب- البرهان بالتراجع أن $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

نسمي الخاصية $P(n)$ حيث

$$P(n): T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

نتحقق من الخاصية $P(n)$ من أجل $n = 1$:

$$T_1 = \frac{1}{6}(1)(1+1)(14-5(1))$$

$$T_1 = \frac{1}{6}(2)(9) = \frac{18}{6}$$

ومنه

$$T_1 = 3$$

وأيضا لدينا

$$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$$

عند تعويض $n = 1$ فإننا نأخذ قيمة الحد الأول فقط وهو u_1 فتصبح

$$T_1 = u_1 = 3$$

ومنه الخاصية $P(1)$ محققة

نفرض أن الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أنها محققة أي

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+1+1)(14-5(n+1))$$

هذا يكافئ

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(14-5n-5)$$

ويكافئ

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$$

ونعلم مما سبق أن $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$

إذن

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18)$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + (n+1)u_{n+1}$$

ولدينا من عبارة الحد العام $u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$ أي

$$u_{n+1} = -\frac{5}{2}(n+1) + \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}n + 3$$

ولدينا أيضا من العلاقة التي فرضنا صحتها أن

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

بتعويض هاتين العلاقتين الأخيرتين في التي قبلهما تصبح

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)\left(-\frac{5}{2}n + 3\right)$$

نستخرج $(n+1)$ كعامل مشترك تصبح

$$T_{n+1} = (n+1)\left[\frac{1}{6}n(14-5n) + \left(-\frac{5}{2}n + 3\right)\right]$$

وهذا يكافئ

$$T_{n+1} = (n+1)\left[\frac{14}{6}n - \frac{5}{6}n^2 - \frac{5}{2}n + 3\right]$$

نقوم باستخراج $\frac{1}{6}$ كعامل مشترك تصبح

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)\left[14n - 5n^2 - 15n + 18\right]$$

ومنه $P(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

ومنه

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

13. بكالوريا 2014 الموضوع الأول

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الأربعة الآتية ، مع التعليل

1- (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$ ، الحد العام للمتتالية (u_n) هو :

أ- $u_n = 1 + 3n$ ب- $u_n = 7 + 3n$ جـ- $u_n = -5 + 3n$

2- n عدد طبيعي ، المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ يساوي

أ- $\frac{n^2+n}{2}$ ب- $\frac{n(n-1)}{2}$ جـ- $\frac{n^2+1}{2}$

3- x عدد حقيقي ، تكون الأعداد $x-2$ ، x ، $x+1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية اذا كان :

أ- $x = 3$ ب- $x = 5$ جـ- $x = -2$

4- (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$ ، أساس المتتالية (v_n) هو :

أ- 2 ب- 3 جـ- 6

تعيين اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ندرس إشارة الفرق بين $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n$$

وهذا يكافئ نستخرج $2 \cdot 3^n$ كعامل مشترك تصبح

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 3^n(3-1)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 3^n(2) = 4 \cdot 3^n$$

$$u_{n+1} - u_n = 4 \cdot 3^n > 0$$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما

حساب المجموع S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

لدينا مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية ونكتب

$$S_n = u_0 \frac{q^{n-1-0+1} - 1}{q-1}$$

وهذا يكافئ

$$S_n = 2\frac{3^n - 1}{3-1} = 2\frac{3^n - 1}{2}$$

ومنه

$$S_n = 3^n - 1$$

استنتاج قيمة المجموع

$$S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 486$$

نلاحظ أن

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_5$$

إذن لدينا المجموع

$$S = u_0 \frac{q^{5-0+1} - 1}{q-1}$$

ويكافئ

$$S = 2\frac{3^6 - 1}{3-1} = 2\frac{3^6 - 1}{2} = 3^6 - 1$$

ومنه

$$S = 728$$

5-أ- تعيين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل من الأعداد 3، 3^2، 3^3 و 3^4

لدينا

$$3 \equiv 3\,[5]$$

$$3^2 \equiv 4\,[5]$$

$$3^3 \equiv 2\,[5]$$

$$3^4 \equiv 1\,[5]$$

بما أن الأعداد مكتوبة من الشكل 3^n فيمكننا تلخيصها في الجدول التالي:

n	1	2	3	4
الباقي	3	4	2	1

5-ب- استنتاج أن $3^{4k} \equiv 1\,[5]$

لدينا

$$3^4 \equiv 1\,[5]$$

ندخل k للطرفين تصبح $3^{4k} \equiv 1^k\,[5]$

وبما أن العدد 1 مهما كان أسه يبقى 1، ومنه

$$3^{4k} \equiv 1\,[5]$$

6-تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5

بما أن $3^n - 1$ قابلة للقسمة على 5 فإن الباقي يجب أن يكون 0 ونكتب

$$3^n - 1 \equiv 0\,[5]$$

نضيف العدد 1 للطرفين تصبح

$$3^n - 1 + 1 \equiv 0 + 1\,[5]$$

وهذا يكافئ

$$3^n \equiv 1\,[5]$$

ولكن لدينا هذه الموافقة

$$3^{4k} \equiv 1\,[5]$$

ومنه

$$n \equiv 4k$$

حيث $k \in N$

12. بكالوريا 2015 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r حيث:

$u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$

1-أ-بين أن: $u_1 + u_3 = 1$

1-ب-عين الحد الأول u_1، ثم استنتج أن $r = -\frac{5}{2}$

2-اكتب u_n بدلالة n

3-أ-احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

3-ب-عين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها $S_n = -\frac{657}{2}$

4-n عدد طبيعي غير معدوم، نضع:

$$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$$

4-أ-تحقق انه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

$$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

4-ب-باستعمال الاستدلال بالتراجع، اثبت انه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

الحل

1-أ- البرهان أن $u_1 + u_3 = 1$

للبرهان على ذلك نستعمل الوسط الحسابي ونكتب

$$u_1 + u_3 = 2u_2$$

نعوض $u_2 = \frac{1}{2}$ تصبح $u_1 + u_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

ومنه

$$u_1 + u_3 = 1$$

1-ب- تعيين الحد الأول u_1

لدينا

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 1 \\ u_1 - u_3 = 5 \end{cases}$$

نقوم بالجمع طرفا لطرف نجد $2u_1 + u_3 - u_3 = 6$

ويكافئ

$$2u_1 = 6$$

ومنه

$$u_1 = \frac{6}{2} = 3$$

استنتاج أن $r = -\frac{5}{2}$

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هي:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$

ولدينا $u_1 = 3$ و $u_2 = \frac{1}{2}$ بتعويضهما نجد

$$u_2 = u_1 + (2-1)\,r$$

وهذا يكافئ

$$\frac{1}{2} = 3 + (1)\,r$$

ويكافئ

$$r = \frac{1}{2} - 3$$

ومنه

$$r = -\frac{5}{2}$$

2-كتابة u_n بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام هي:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$

ولدينا الأساس $r = -\frac{5}{2}$ والحد الأول $u_1 = 3$ تصبح

$$u_n = u_1 + (n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

وهذا يكافئ

$$u_n = 3 - \frac{5}{2}n + \frac{5}{2}$$

ومنه

$$u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$$

10. بكالوريا 2016 الموضوع الثاني

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 وتحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1-احسب الحد الأول u_0

2-اكتب الحد العام u_n بدلالة n

3-عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$

4-احسب المجموع S بحيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}$

5-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة:

$$v_n = 2u_n + 3$$

احسب المجموعة S' بحيث: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{49}$

الحل

1-حساب الحد الأول u_0

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هي:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r \quad \text{مع } n \geq p$$

ولدينا $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

باستعمال عبارة الحد العام سنكتب الحدود u_1، u_2 و u_3 بدلالة u_0 إذن

$$u_1 = u_0 + (1-0)\,3 = u_0 + 3$$
$$u_2 = u_0 + (2-0)\,3 = u_0 + 6$$
$$u_3 = u_0 + (3-0)\,3 = u_0 + 9$$

بتعويض هذه الحدود في العلاقة المعطاة نجد

$$u_0 + u_0 + 3 + u_0 + 6 + u_0 + 9 = 10$$

هذا يكافئ $4u_0 + 18 = 10$

ويكافئ $4u_0 = 10 - 18 = -8$

ومنه $u_0 = \frac{-8}{4} = -2$

2-كتابة الحد العام لـ (u_n) بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هي:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r \quad \text{مع } n \geq p$$

بتعويض الحد الأول والأساس تصبح

$$u_n = u_0 + (n-0)\,3$$

ومنه $u_n = 3n - 2$

3-تعيين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$

لدينا $3n - 2 = 145$

هذا يكافئ $3n = 145 + 2$

ومنه $n = \frac{147}{3} = 49$

4-حساب المجموع S

إن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = 3$ و $u_0 = -2$ ونكتب

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}\right]$$

وهذا يكافئ $S = \frac{49-0+1}{2}\left[u_0 + u_{49}\right]$

ويكافئ $S = \frac{50}{2}\left[-2 + 145\right]$

ومنه $S = 3575$

5-حساب المجموع S'

لدينا $v_n = 2u_n + 3$

نعوض $n = 0$ نجد $v_0 = 2u_0 + 3$

نعوض $n = 1$ نجد $v_1 = 2u_1 + 3$

$$\cdots$$
$$\cdots$$

نعوض $n = 49$ نجد $v_{49} = 2u_{49} + 3$

عندما نقوم بالجمع العمودي تصبح

$$S' = 2S + 3(\text{عدد الحدود})$$

هذا يكافئ $S' = 2\,(3575) + 3(50)$

ومنه $S' = 7300$

11. بكالوريا 2015 الموضوع الأول

(u_n) المتتالية الهندسية التي حدها الأول u_0 وأساسها q حيث $u_0 = 2$ و $q = 3$:

1-احسب u_1 و u_2

2-اكتب u_n بدلالة n، ثم استنتج u_5

3-عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4-أ-احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

4-ب-استنتج قيمة المجموع:

$$S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 486$$

5-أ-عين باقي القسمة الاقليدية على 5 لكل عدد من الاعداد 3^2، 3^3 و 3^4

5-ب-استنتج انه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1[5]$

6-عين الأعداد الطبيعية n التي من اجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5

الحل

1-حساب u_1 و u_2

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية هي:

$$u_n = u_p \cdot q^{n-p} \quad \text{مع } n \geq p$$

حساب u_1

نعوض $n = 1$ في عبارة الحد العام نجد

$$u_1 = u_0 \cdot q^{1-0}$$

ولدينا $U_0 = 2$ و $q = 3$ بالتعويض تصبح

$$u_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$$

ومنه $u_1 = 6$

حساب u_2

نعوض $n = 2$ في عبارة الحد العام نجد $u_2 = u_0 \cdot q^{2-0}$

ولدينا $u_0 = 2$ و $q = 3$ بالتعويض تصبح

$$u_2 = 2 \cdot 3^2 = 18$$

ومنه $u_2 = 18$

2- كتابة u_n بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية هي:

$$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

بما أن الحد الأول هو $u_0 = 2$ و $q = 3$ بالتعويض نجد

$$u_n = u_0 \cdot q^{n-0} = 2 \cdot 3^n$$

ومنه $u_n = 2 \cdot 3^n$

استنتاج u_5

لدينا $u_n = 2 \cdot 3^n$

بتعويض $n = 5$ نجد $u_5 = 2 \cdot 3^5$

ومنه $u_5 = 486$

حساب المجموع S بدلالة n

إن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = 6$ و حدها الأول $U_0 = -5$ ونكتب

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}\right]$$

$$S = \frac{n-0+1}{2}\left[U_0 + U_n\right]$$

وهذا يكافئ
$$S = \frac{n+1}{2}\left[-5 + 6n - 5\right]$$

ويكافئ
$$S = \frac{n+1}{2}\left[6n - 10\right]$$

ومنه
$$S = (n+1)(3n-5)$$

9. بكالوريا 2016 الموضوع الأول

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب:
$$u_n = 3n - 2$$

1. احسب u_0، u_1، u_2 و u_3
2. بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها
3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
4. بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) و عين رتبته
5. أ. احسب بدلالة n المجموع:
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
5. ب. عين العدد n بحيث يكون : $S_n = 328$

الحل:

1-حساب الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3

لدينا
$$u_n = 3n - 2$$

حساب u_0

بتعويض $n = 0$ نجد
$$u_0 = 3(0) - 2 = -2$$
ومنه
$$u_0 = -2$$

حساب u_1

بتعويض $n = 1$ نجد
$$u_1 = 3(1) - 2 = 1$$
ومنه
$$u_1 = 1$$

حساب u_2

بتعويض $n = 2$ نجد
$$u_2 = 3(2) - 2 = 4$$
ومنه
$$u_2 = 4$$

حساب u_3

بتعويض $n = 3$ نجد
$$u_3 = 3(3) - 2 = 7$$
ومنه
$$u_3 = 7$$

2-البرهان أن المتتالية (u_n) حسابية مع تعيين أساسها

حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية يجب أن
$$u_{n+1} - u_n = r$$
لدينا
$$u_n = 3n - 2$$
ومنه
$$u_{n+1} = 3(n+1) - 2$$
إذن
$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2)$$
هذا يكافئ
$$u_{n+1} - u_n = 3n + 3 - 2 - 3n + 2$$
ومنه
$$u_{n+1} - u_n = 3$$
ومنه المتتالية (u_n) حسابية وأساسها $r = 3$

3-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق بين $u_{n+1} - u_n$

لدينا
$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2)$$
هذا يكافئ
$$u_{n+1} - u_n = 3n + 3 - 2 - 3n + 2$$
ومنه
$$u_{n+1} - u_n = 3 > 0$$
ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

طريقة ثانية لدراسة اتجاه التغير:

بما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ و $3 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

4-البرهان أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وتعين رتبته

للبرهان على ذلك نحل المعادلة
$$u_n = 1954$$
هذا يكافئ
$$3n - 2 = 1954$$
ويكافئ
$$3n = 1954 + 2$$
ومنه
$$n = \frac{1956}{3} = 652$$
بما أن $n = 652 \in \mathbb{N}$ فإن 1954 حد من حدود المتتالية (u_n)

تعيين رتبة الحد u_{652}

رتبة الحد u_{652} تنطلق من الحد الأول u_0 إلى غاية u_{652} ونكتب
$$(652 - 0) + 1 = 653$$
ومنه رتبة الحد u_{652} هي 653

5-أ- حساب S_n بدلالة n

إن S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $u_0 = -2$ ونكتب

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}\right]$$

وهذا يكافئ
$$S_n = \frac{n-0+1}{2}\left[u_0 + u_n\right]$$
ويكافئ
$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[-2 + 3n - 2\right]$$
ومنه
$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[3n - 4\right]$$

5-ب- تعيين العد الطبيعي n حيث يكون: $S_n = 328$

لدينا
$$S_n = 328$$
هذا يكافئ
$$\frac{n+1}{2}\left[3n - 4\right] = 328$$
بضرب الوسطين في الطرفين نجد
$$(n+1)\left[3n - 4\right] = 328(2)$$
هذا يكافئ
$$3n^2 - 4n + 3n - 4 = 656$$
ويكافئ
$$3n^2 - 4n + 3n - 4 - 656 = 0$$
إذن تصبح
$$3n^2 - n - 660 = 0$$
معادلة من الدرجة الثانية نحلها بالمميز
$$\Delta = b^2 - 4a \cdot c$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-660)$$
$$\sqrt{\Delta} = 89$$
للعبارة حلين
$$\begin{cases} n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-89}{2(3)} = -\frac{88}{6} \\ n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+89}{2(3)} = \frac{90}{6} = 15 \end{cases}$$

الحل $n_2 = 15 \in \mathbb{N}$ مقبول لأنه ينتمي للأعداد الطبيعية

الحل $n_1 = \frac{-88}{6} \notin \mathbb{N}$ مرفوض لأنه لا ينتمي للأعداد الطبيعية

قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 328$ هي
$$n = 15$$

10. بكالوريا 2016 الموضوع الثاني

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0
وتحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$
1-احسب الحد الأول u_0
2-اكتب الحد العام u_n بدلالة n
3-عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$
4-احسب المجموع S بحيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}$
5-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة:
$$v_n = 2u_n + 3$$
احسب المجموعة S' بحيث: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{49}$

الحل

1-حساب الحد الأول u_0

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هي:
$$u_n = u_p + (n-p)\,r \quad \text{مع} \quad n \geq p$$
ولدينا $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$
باستعمال عبارة الحد العام سنكتب الحدود u_1، u_2 و u_3 بدلالة u_0
إذن
$$u_1 = u_0 + (1-0)\,3 = u_0 + 3$$
$$u_2 = u_0 + (2-0)\,3 = u_0 + 6$$
$$u_3 = u_0 + (3-0)\,3 = u_0 + 9$$
بتعويض هذه الحدود في العلاقة المعطاة نجد
$$u_0 + u_0 + 3 + u_0 + 6 + u_0 + 9 = 10$$
هذا يكافئ $4u_0 + 18 = 10$
ويكافئ $4u_0 = 10 - 18 = -8$
ومنه $u_0 = \frac{-8}{4} = -2$

2-كتابة الحد العام لـ (u_n) بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هي:
$$u_n = u_p + (n-p)\,r \quad \text{مع} \quad n \geq p$$
بتعويض الحد الأول والأساس تصبح
$$u_n = u_0 + (n-0)\,3$$
ومنه $u_n = 3n - 2$

3-تعيين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$

لدينا $3n - 2 = 145$
هذا يكافئ $3n = 145 + 2$
ومنه $n = \frac{147}{3} = 49$

4-حساب المجموع S

إن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = 3$ و $u_0 = -2$
ونكتب
$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}\right]$$
وهذا يكافئ $S = \frac{49-0+1}{2}\left[u_0 + u_{49}\right]$
ويكافئ $S = \frac{50}{2}\left[-2 + 145\right]$
ومنه $S = 3575$

5-حساب المجموع S'

لدينا
$$v_n = 2u_n + 3$$
نعوض $n = 0$ نجد $v_0 = 2u_0 + 3$
نعوض $n = 1$ نجد $v_1 = 2u_1 + 3$
...
...
نعوض $n = 49$ نجد $v_{49} = 2u_{49} + 3$
عندما نقوم بالجمع العمودي تصبح
$$S' = 2S + 3(\text{عدد الحدود})$$
هذا يكافئ $S' = 2\,(3575) + 3(50)$
ومنه $S' = 7300$

11. بكالوريا 2015 الموضوع الأول

(u_n) المتتالية الهندسية التي حدها الأول u_0 وأساسها q حيث $u_0 = 2$ و $q = 3$:
1-احسب u_1 و u_2
2-اكتب u_n بدلالة n، ثم استنتج u_5
3-عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)
4-أ-احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$
4-ب-استنتج قيمة المجموع:
$$S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 486$$
5-أ-عين باقي القسمة الاقليدية على 5 لكل عدد من الاعداد 3، 3^2، 3^3 و 3^4
5-ب-استنتج انه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1[5]$
6-عين الأعداد الطبيعية n التي من اجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5

الحل

1-حساب u_1 و u_2

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية هي:
$$u_n = u_p \cdot q^{n-p} \quad \text{مع} \quad n \geq p$$
حساب u_1
نعوض $n = 1$ في عبارة الحد العام نجد
$$u_1 = u_0 \cdot q^{1-0}$$
ولدينا $U_0 = 2$ و $q = 3$ بالتعويض تصبح
$$u_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$$
ومنه $u_1 = 6$
حساب u_2
نعوض $n = 2$ في عبارة الحد العام نجد $u_2 = u_0 \cdot q^{2-0}$
ولدينا $u_0 = 2$ و $q = 3$ بالتعويض تصبح
$$u_2 = 2 \cdot 3^2 = 18$$
ومنه $u_2 = 18$

2- كتابة u_n بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية هي:
$$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$
بما أن الحد الأول هو $u_0 = 2$ و $q = 3$ بالتعويض نجد
$$u_n = u_0 \cdot q^{n-0} = 2 \cdot 3^n$$
ومنه $u_n = 2 \cdot 3^n$
استنتاج u_5
لدينا
$$u_n = 2 \cdot 3^n$$
بتعويض $n = 5$ نجد $u_5 = 2 \cdot 3^5$
ومنه $u_5 = 486$

تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق بين $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n$$

وهذا يكافئ

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n$$

نستخرج $2 \cdot 3^n$ كعامل مشترك تصبح

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 3^n (3 - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 3^n (2) = 4 \cdot 3^n$$

أي

$$u_{n+1} - u_n = 4 \cdot 3^n > 0$$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما

4-أ- حساب المجموع S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

لدينا وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية ونكتب

$$S_n = u_0 \frac{q^{n-1-0+1} - 1}{q - 1}$$

$$S_n = 2\frac{3^n - 1}{3 - 1} = 2\frac{3^n - 1}{2}$$

وهذا يكافئ

$$S_n = 3^n - 1$$

ومنه

4-ب- استنتاج قيمة المجموع
$$S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 486$$

نلاحظ أن

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_5$$

أي لدينا المجموع

$$S = u_0 \frac{q^{5-0+1} - 1}{q - 1}$$

ويكافئ

$$S = 2\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 2\frac{3^6 - 1}{2} = 3^6 - 1$$

ومنه

$$S = 728$$

5-أ- تعيين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل من الأعداد 3، 3^2، 3^3 و 3^4

لدينا

$$3 \equiv 3\,[5]$$
$$3^2 \equiv 4\,[5]$$
$$3^3 \equiv 2\,[5]$$
$$3^4 \equiv 1\,[5]$$

بما أن الأعداد مكتوبة من الشكل 3^n فيمكننا تلخيصها في الجدول التالي:

4	3	2	1	n
1	2	4	3	الباقي

5-ب- استنتاج أن $3^{4k} \equiv 1\,[5]$

لدينا

$$3^4 \equiv 1\,[5]$$

ندخل k للطرفين تصبح $3^{4k} \equiv 1^k\,[5]$

وبما أن العدد 1 مهما كان أسه يبقى 1، ومنه

$$3^{4k} \equiv 1\,[5]$$

6-تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5

بما أن $3^n - 1$ قابلة للقسمة على 5 فإن الباقي يجب أن يكون 0 ونكتب

$$3^n - 1 \equiv 0\,[5]$$

نضيف العدد 1 للطرفين تصبح

$$3^n - 1 + 1 \equiv 0 + 1\,[5]$$

وهذا يكافئ

$$3^n \equiv 1\,[5]$$

ولكن لدينا هذه الموافقة

$$3^{4k} \equiv 1\,[5]$$

ومنه

$$n \equiv 4k$$

حيث $k \in N$

12. بكالوريا 2015 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r حيث:
$u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$

1-أ-تبين أن: $u_1 + u_3 = 1$

1-ب-عين الحد الأول u_1، ثم استنتج أن $r = -\frac{5}{2}$

2-اكتب u_n بدلالة n

3-أ-احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

3-ب-عين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها
$S_n = -\frac{657}{2}$

4-n عدد طبيعي غير معدوم، نضع:
$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$

4-أ-تحقق انه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:
$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$

4-ب-باستعمال الاستدلال بالتراجع، اثبت انه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

الحل

1-أ- البرهان أن $u_1 + u_3 = 1$

للبرهان على ذلك نستعمل الوسط الحسابي ونكتب

$$u_1 + u_3 = 2u_2$$

نعوض $u_2 = \frac{1}{2}$ تصبح $u_1 + u_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

ومنه

$$u_1 + u_3 = 1$$

1-ب- تعيين الحد الأول u_1

لدينا

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 1 \\ u_1 - u_3 = 5 \end{cases}$$

نقوم بالجمع طرفا لطرف نجد $2u_1 + u_3 - u_3 = 6$

ويكافئ

$$2u_1 = 6$$

ومنه

$$u_1 = \frac{6}{2} = 3$$

استنتاج أن $r = -\frac{5}{2}$

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هي:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$

ولدينا $u_1 = 3$ و $u_2 = \frac{1}{2}$ بتعويضهما نجد

$$u_2 = u_1 + (2-1)\,r$$

وهذا يكافئ

$$\frac{1}{2} = 3 + (1)\,r$$

ويكافئ

$$r = \frac{1}{2} - 3$$

ومنه

$$r = -\frac{5}{2}$$

2-كتابة u_n بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام هي:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$

ولدينا الأساس $r = -\frac{5}{2}$ والحد الأول $u_1 = 3$ تصبح

$$u_n = u_1 + (n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

وهذا يكافئ

$$u_n = 3 - \frac{5}{2}n + \frac{5}{2}$$

ومنه

$$u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$$

3-أ- حساب بدلالة n المجموع S_n

لدينا

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية ونكتب

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}]$$

وهذا يكافئ

$$S_n = \frac{n-1+1}{2}[u_1 + u_n]$$

ويكافئ

$$S_n = \frac{n}{2}\left[3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right]$$

ومنه

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\frac{17-5n}{2}\right]$$

3-ب- تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها

$$S_n = -\frac{657}{2}$$

$$\frac{n}{2}\left[\frac{17-5n}{2}\right] = -\frac{657}{2}$$

وهذا يكافئ

$$n\left[\frac{17-5n}{2}\right] = -657$$

نستعمل جداء الطرفين في جداء الوسطين نجد

$$n(17-5n) = -657\ (2)$$

وهذا يكافئ

$$-5n^2 + 17n = -1314$$

ويكافئ

$$-5n^2 + 17n + 1314 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a\cdot c = (17)^2 - 4(-5)(1314)$$

إذن

$$\sqrt{\Delta} = 163$$

لدينا حلين هما

$$\begin{cases} n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17-163}{2(-5)} = 18 \\ n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17+163}{2(-5)} = -30.9 \end{cases}$$

الحل $n_1 = 18$ مقبول لأنه ينتمي إلى الأعداد الطبيعية

$$n_1 \in \mathbb{N}$$

أما الحل $n_2 = -30.9$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى الأعداد الطبيعية

$$n_2 \notin \mathbb{N}$$

ومنه قيمة n حتى يكون $S_n = -\frac{657}{2}$ هي

$$n = 18$$

4-أ- التحقق أن $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$

لدينا

$$(n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n$$

ومنه

$$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

4-ب- البرهان بالتراجع أن $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

نسمي الخاصية $P(n)$ حيث

$$P(n): T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

نتحقق من الخاصية $P(n)$ من أجل $n = 1$:

$$T_1 = \frac{1}{6}(1)(1+1)(14-5(1))$$

$$T_1 = \frac{1}{6}(2)(9) = \frac{18}{6}$$

ومنه

$$T_1 = 3$$

وأيضا لدينا

$$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$$

عند تعويض $n = 1$ فإننا نأخذ قيمة الحد الأول فقط وهو u_1

فتصبح

$$T_1 = u_1 = 3$$

ومنه الخاصية $P(1)$ محققة

نفرض أن الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أنها محققة أي

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+1+1)(14-5(n+1))$$

هذا يكافئ

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(14-5n-5)$$

ويكافئ

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$$

ونعلم مما سبق أن

$$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

إذن

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18)$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + (n+1)u_{n+1}$$

ولدينا من عبارة الحد العام $u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$ أي

$$u_{n+1} = -\frac{5}{2}(n+1) + \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}n + 3$$

ولدينا أيضا من العلاقة التي فرضنا صحتها أن

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

بتعويض هاتين العلاقتين الأخيرتين في التي قبلهما تصبح

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)\left(-\frac{5}{2}n + 3\right)$$

نستخرج $(n+1)$ كعامل مشترك تصبح

$$T_{n+1} = (n+1)\left[\frac{1}{6}n(14-5n) + \left(-\frac{5}{2}n + 3\right)\right]$$

وهذا يكافئ

$$T_{n+1} = (n+1)\left[\frac{14}{6}n - \frac{5}{6}n^2 - \frac{5}{2}n + 3\right]$$

نقوم باستخراج $\frac{1}{6}$ كعامل مشترك تصبح

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)[14n - 5n^2 - 15n + 18]$$

ومنه $P(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

ومنه

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

13. بكالوريا 2014 الموضوع الأول

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربعة الآتية ، مع التعليل

1- (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$ ، الحد العام للمتتالية (u_n) هو :

أ- $u_n = 1 + 3n$ ب- $u_n = 7 + 3n$ جـ- $u_n = -5 + 3n$

2- n عدد طبيعي ، المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ يساوي:

أ- $\frac{n^2+n}{2}$ ب- $\frac{n(n-1)}{2}$ جـ- $\frac{n^2+1}{2}$

3- x عدد حقيقي ، تكون الأعداد $x-2$ ، x ، $x+1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية اذا كان :

أ- $x = 3$ ب- $x = 5$ جـ- $x = -2$

4- (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$ ، أساس المتتالية (v_n) هو :

أ- 2 ب- 3 جـ- 6

الحل

1- الحد العام للمتتالية (u_n):

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هو:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$

حيث r هو الأساس والشرط الذي يجب أن يكون محقق هو $n > p$

نقوم بالتعويض في عبارة الحد العام نجد

$$u_n = u_2 + (n-2)\,(3)$$

$$u_n = 1 + 3n - 6$$

هذا يكافئ

$$u_n = -5 + 3n$$

ومنه الإجابة هي: ج

2- المجموع $n + \cdots + 3 + 2 + 1$ يساوي:

نلاحظ أن المجموع $n + \cdots + 3 + 2 + 1$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 1 (لأن الفرق بين كل حدين متتاليين هو نفسه وهو 1)

ومجموع متتالية حسابية يعطى بالعبارة:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}\right]$$

بالتعويض نجد:

$$S_n = \frac{n-1+1}{2}[1+n]$$

إذن

$$S_n = \frac{n}{2}[1+n]$$

بعد عملية النشر والتبسيط نجد:

$$S_n = \frac{n^2+n}{2}$$

ومنه الجواب هو: أ

3- لدينا $x-2$ ، x ، $x+1$ بهذا الترتيب تكون حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

بما أن الأعداد $x-2$ ، x ، $x+1$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية فيمكننا تطبيق علاقة الوسط الهندسي.

إذا كان a و b و c حدود متتابعة فالوسط الهندسي لها هو:

$$b^2 = a \cdot c$$

بالتعويض نجد

$$(x)^2 = (x-2).(x+1)$$

هذا يكافئ

$$x^2 - x^2 - x + 2x + 2 = 0$$

بعد التبسيط نجد

$$x + 2 = 0$$

إذن

$$x = -2$$

ومنه الجواب هو: ج

4- أساس المتتالية (v_n):

لدينا

$$v_n = 2 \cdot 3^{n+1}$$

بما أن المتتالية هندسية فيمكننا المطابقة مع عبارة الحد العام وهي:

$$v_n = v_p \cdot q^{n-p}$$

ومنه الأساس $q = 3$

الجواب هو: ب

14. بكالوريا 2014 الموضوع الثاني

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = 5v_n + 4$

1- احسب : v_1 ، v_2 و v_3

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n + 1$

2- أ- بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$

2- ب- اكتب عبارة الحد العام لـ u_n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n

2- جـ- حلل العدد 1250 الى جداء عوامل أولية واستنتج انه حد من حدود المتتالية (u_n)

3- أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

3- ب- احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث :

$$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

الحل

1- حساب v_1 ، v_2 و v_3:

حساب v_1:

لدينا

$$v_{n+1} = 5v_n + 4$$

نقوم بتعويض $n = 0$ نجد

$$v_{0+1} = 5v_0 + 4$$

هذا يكافئ

$$v_1 = 5(1) + 4 = 9$$

ومنه

$$v_1 = 9$$

حساب v_2:

نقوم بتعويض $n = 1$ نجد

$$v_{1+1} = 5v_1 + 4$$

هذا يكافئ

$$v_2 = 5(9) + 4 = 49$$

ومنه

$$v_2 = 49$$

حساب v_3:

نقوم بتعويض $n = 2$ نجد

$$v_{2+1} = 5v_2 + 4$$

هذا يكافئ

$$v_3 = 5(49) + 4 = 249$$

ومنه

$$v_3 = 249$$

2- أ- البرهان أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$

تكون (u_n) متتالية هندسية إذا كان: $u_{n+1} = u_n \cdot q$

لدينا

$$u_n = v_n + 1$$

نضيف العدد 1 للعدد n تصبح

$$u_{n+1} = v_{n+1} + 1$$

ولدينا $v_{n+1} = 5v_n + 4$ بالتعويض نجد

$$u_{n+1} = 5v_n + 4 + 1$$

هذا يكافئ

$$u_{n+1} = 5v_n + 5$$

نستخرج العدد 5 كعامل مشترك تصبح

$$u_{n+1} = 5(v_n + 1)$$

ونعلم أن $u_n = v_n + 1$ بتعويضها نجد

$$u_{n+1} = u_n \,.5$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$

حساب الحد الأول u_0 للمتتالية (u_n):

لدينا

$$u_n = v_n + 1$$

نقوم بتعويض $n = 0$ نجد

$$u_0 = v_0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

ومنه

$$u_0 = 2$$

2- ب- كتابة u_n بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية هي

$$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

بعد التعويض نجد $u_n = u_0 . 5^{n-0}$

ومنه $u_n = 2 . 5^n$

استنتاج v_n بدلالة n

لدينا $u_n = v_n + 1$

بتعويض $u_n = 2 . 5^n$ تصبح $2 . 5^n = v_n + 1$

ومنه $v_n = 2 . 5^n - 1$

2-جـ تحليل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية

نقوم بالقسمة على أصغر الأعداد الأولية وهو 2 إلى غاية أن نجد الفاصلة فننتقل إلى الذي يليه وهو 3 ثم 5 ثم 7 وهكذا إلى غاية الوصول للعدد 1 كالتالي:

1250	2
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

ومنه $1250 = 2 \cdot 5^4$

استنتاج أن العدد 1250 حدا من حدود المتتالية (u_n)

لدينا $u_n = 1250$

هذا يكافئ $2 \cdot 5^n = 1250$

ونعلم أن $1250 = 2 \cdot 5^4$ فتصبح

$$2 \cdot 5^n = 2 \cdot 5^4$$

نختزل 2 مع 2 تصبح $5^n = 5^4$

بما أنه يتساوى عددان إذا تساوى أساسيهما نجد $n = 4$

وبما أن $n \in \mathbb{N}$ ينتمي للأعداد الطبيعية فإن العدد 1250 حدا من حدود المتتالية (u_n) رتبته $4 - 0 + 1 = 5$

3-أ- حساب بدلالة n المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

بما أن (u_n) متتالية هندسية فنطبق علاقة المجموع:

$$S_n = \text{الحد الأول للمجموع} \, \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

هذا يكافئ $S_n = u_0 \frac{5^{n-1-0+1} - 1}{5-1}$

ويكافئ $S_n = 2 \frac{5^n - 1}{4}$

إذن $S_n = 2 \frac{5^n - 1}{4}$

ومنه $S_n = \frac{1}{2}[5^n - 1]$

3-ب- حساب بدلالة n المجموع:

$$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

لدينا $u_n = v_n + 1$

بما أن مجموع المتتالية (u_n) هو S_n، ومجموع المتتالية (v_n) هو S'_n فتصبح العلاقة:

$$S_n = S'_n + 1(\text{عدد الحدود})$$

هذا يكافئ $S_n = S'_n + 1(n - 1 - 0 + 1)$

ويكافئ $S_n = S'_n + n$

إذن $S'_n = S_n - n$

ومنه $S'_n = \frac{1}{2}[5^n - 1] - n$

15. بكالوريا 2013 الموضوع الأول

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3

1-أ-عبر عن v_n بدلالة n

1-ب-احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$ ثم استنتج تغير المتتالية (v_n)

2-نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

2-أ- احسب بدلالة n المجموع S_n

2-ب- عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$

2-جـ- اثبت بالتراجع انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

الحل

1-أ- التعبير عن v_n بدلالة n

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n)

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

بتعويض الحد الأول والأساس نجد

$$v_n = v_0 \times 3^{n-0}$$

ومنه $v_n = 2 \times 3^n$

1-ب- حساب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$

لدينا $v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$

هذا يكافئ $v_{n+1} - V_n = 2 \times 3^n . 3 - 2 \times 3^n$

نستخرج 2×3^n كعامل مشترك تصبح

$$v_{n+1} - v_n = (2 \times 3^n)(3 - 1)$$

$$v_{n+1} - v_n = (2 \times 3^n)(2)$$

ومنه $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

لدينا $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$

بما أن $4 > 0$ و $3^n > 0$ فإن

$$v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n > 0$$

ومنه فالمتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

2-أ- حساب بدلالة n المجموع S_n

لدينا $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية، نحسبه بالعلاقة

$$S_n = \text{الحد الأول} \, \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

هذا يكافئ $S_n = 2 \frac{3^{n-1-0+1} - 1}{3-1}$

ومنه $S_n = 3^n - 1$

2-ب- تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$

لدينا $S_n = 80$

هذا يكافئ $3^n - 1 = 80$

$$3^n = 80 + 1$$

$$3^n = 81$$

نقوم بقسمة العدد 81 على 3 كالتالي

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$3^n = 3^4$$
$$n = 4$$

إذن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$ هي $n = 4$

2-نبرهن بالتراجع أن العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

مرحلة التحقق:
نسمي $P(n)$ الخاصية $3^n - 1$
من أجل $n = 0$ أي
$$3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$
العدد 0 يقبل القسمة على 2
أي أن $P(0)$ محققة

مرحلة الفرضية:
نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل n أي $3^n - 1$ يقبل القسمة على العدد 2، أي
$$3^n - 1 = 2k \quad ; k \in \mathbb{N}$$
$$3^n = 2k + 1$$

مرحلة البرهان:
نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $3^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 2.
أي
$$3^{n+1} - 1 = 2k' \quad ; k' \in \mathbb{N}$$
$$3^{n+1} = 2k' + 1$$
لدينا
$$3^{n+1} - 1 = 3^n.3 - 1$$
ولدينا من الفرضية $3^n = 2k + 1$ نقوم بتعويضها نجد
$$3^{n+1} - 1 = (2k+1).3 - 1$$
$$3^{n+1} - 1 = 6k + 3 - 1$$
$$3^{n+1} - 1 = 6k + 2$$
نستخرج 2 كعامل مشترك تصبح
$$3^{n+1} - 1 = 2(3k+1)$$
ومنه
$$3^{n+1} - 1 = 2k'$$
لأن
$$k' = 3k + 1$$
ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة من أجل $(n+1)$
وأخيرا العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

16. بكالوريا 2013 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث :
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$
1-احسب u_0
2-بين انه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5n + 1$
3-عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$
4-احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$
5-المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة :
$$V_n = 2u_n + 1$$
5-أ-ادرس اتجاه تغير المتتالية (V_n)
ب-احسب المجموعة : $S' = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{2013}$

الحل

1-حساب u_0:
لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هو:
حيث
$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$
ولدينا
$$r = 5$$
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

أولا سنكتب الحدود u_1، u_2 و u_3 بدلالة u_0 وذلك باستعمال عبارة الحد العام:
$$u_1 = u_0 + (1-0)\,5 = u_0 + 5$$
$$u_2 = u_0 + (2-0)\,5 = u_0 + 10$$
$$u_3 = u_0 + (3-0)\,5 = u_0 + 15$$
نقوم بتعويض هذه الحدود بما يساويها كالتالي:
لدينا
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$
بالتعويض تصبح:
$$u_0 + u_0 + 5 + u_0 + 10 + u_0 + 15 = 34$$
هذا يكافئ
$$4u_0 + 30 = 34$$
أي
$$4u_0 = 34 - 30$$
إذن
$$u_0 = \frac{4}{4} = 1$$
ومنه
$$u_0 = 1$$

2-بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 5n + 1$:
نقوم بتعويض الحد الأول u_0 في عبارة الحد العام كالتالي:
لدينا
$$u_n = u_0 + (n-0)\,r$$
بتعويض $u_0 = 1$ والأساس $r = 5$ نجد
$$u_n = 1 + (n)\,5$$
ومنه
$$u_n = 5n + 1$$

3-تعيين العدد الطبيعي n بحيث:
$$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$$
لدينا
$$u_n = 5n + 1$$
نقوم بإضافة العدد 1 إلى n فتصبح
$$u_{n+1} = 5(n+1) + 1$$
نقوم بتعويض u_{n+1} و u_n في هذه العلاقة
$$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$$
بعد التعويض تصبح
$$5(n+1) + 1 + 5n + 1 - 8n = 4033$$
بعد النشر نجد
$$5n + 5 + 1 + 5n + 1 - 8n = 4033$$
وهذا يكافئ
$$10n - 8n + 7 = 4033$$
ويكافئ
$$2n = 4033 - 7$$
إذن
$$n = \frac{4026}{2} = 2013$$
ومنه
$$n = 2013$$

4-حساب المجموع:
$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$$
بما أن المتتالية حسابية فمجموعها يعطى بالعلاقة:
$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}\right]$$
هذا يكافئ
$$S = \frac{2013-0+1}{2}\left[u_0 + u_{2013}\right]$$
ويكافئ
$$S = \frac{2014}{2}\left[1 + u_{2013}\right]$$
لحساب u_{2013} نقوم باستعمال عبارة الحد العام كالتالي
$$u_{2013} = 5(2013) + 1 = 10166$$
إذن
$$S = \frac{2014}{2}\left[1 + 10166\right]$$
ومنه
$$S = 10137469$$

5-أ-دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n):
ندرس إشارة الفرق بين $v_{n+1} - v_n$
لدينا
$$v_n = 2u_n + 1$$
نقوم بإضافة 1 للعدد n في v_n وذلك قصد الحصول على v_{n+1} فتصبح
$$v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1$$

ونقوم بإضافة 1 للعدد n في u_n وذلك قصد الحصول على u_{n+1} فتصبح $u_{n+1} = 5(n+1)+1$

بتعويض u_{n+1} في v_{n+1} نجد

$$v_{n+1} = 2[5(n+1)+1]+1$$

والآن بعدما تحصلنا على v_{n+1} نستطيع دراسة إشارة الفرق بين $v_{n+1}-v_n$

لدينا

$$v_{n+1}-v_n = 2[5(n+1)+1]+1-[2u_n+1]$$

وبما أن $u_n = 5n+1$ فنقوم بتعويضها تصبح

$$v_{n+1}-v_n = 2[5(n+1)+1]+1-[2(5n+1)+1]$$

نقوم بالنشر

$$v_{n+1}-v_n = 2[5n+5+1]+1-[10n+2+1]$$

هذا يكافئ

$$v_{n+1}-v_n = 2[5n+6]+1-[10n+3]$$

ويكافئ

$$v_{n+1}-v_n = 10n+12+1-10n-3 = 10$$

إذن: $v_{n+1}-v_n = 10 > 0$

بما أن $v_{n+1}-v_n > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة تماما

وهناك طريقة أخرى لدراسة إشارة الفرق $v_{n+1}-v_n$ وهي:

لدينا $v_{n+1}-v_n = 2u_{n+1}+1-(2u_n+1)$

بما أن المتتالية (u_n) حسابية فالقاعدة تقول إنه في أي متتالية حسابية يكون: $u_{n+1} = u_n+r = u_n+5$

بتعويضها نجد

$$v_{n+1}-v_n = 2(u_n+5)+1-(2u_n+1)$$

بعد النشر نجد

$$v_{n+1}-v_n = 2u_n+10+1-2u_n-1 = 10$$

ومنه $v_{n+1}-v_n = 10 > 0$

بما أن $v_{n+1}-v_n > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة تماما

5-ب- حساب المجموع:

$$S' = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{2013}$$

المتتالية (v_n) هي متتالية تراجعية أي ليست حسابية وليست هندسية، ولكننا نعلم أن المتتالية (u_n) هي متتالية حسابية.

لدينا $v_n = 2u+1$

لو عوضنا $n=0$ نجد $v_0 = 2u_0+1$

و لو عوضنا $n=1$ نجد $v_1 = 2u_1+1$

و لو عوضنا $n=2$ نجد $v_2 = 2u_2+1$

.....

.....

وهكذا إلى غاية $n=2013$ نجد $v_{2013} = 2u_{2013}+1$

لو قمنا بالجمع العمودي لـ $v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{2013}$ سينتج لنا المجموع S'

ومنه

$$S' = 2u_0+1+2u_1+1+2u_2+1+\cdots+2u_{2013}+1$$

نلاحظ أن العدد واحد متكرر حسب عدد الحدود، إذن

$$S' = 2u_0+2u_1+2u_2+\cdots+2u_{2013}+1(\text{عدد الحدود})$$

نستخرج العدد 2 كعامل مشترك ونحسب عدد الحدود تصبح

$$S' = 2[u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{2013}]+1(2013-0+1)$$

نلاحظ أن $S = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{2013}$ هي نفسها مجموع المتتالية الحسابية (u_n) الذي حسبناه من قبل

تصبح العلاقة $S' = 2S+2014$

إذن $S' = 2(10137469)+2014$

ومنه $S' = 20276951$

17. بكالوريا 2012 الموضوع الأول

a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a+b+c=9$

1-أ-احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r

1-ب-علما أن: $a \times c = -16$

-عين الأساس r ثم استنتج a و c

2-(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5

2-أ-عبر عن الحد العام u_n بدلالة n

2-ب-احسب u_{15} ثم استنتج المجموع:

$$S = u_0+u_1+\cdots+u_{15}$$

3-(v_n) متتالية عددية معرفة على ℕ بالعلاقة:

$$8v_n - u_n = 0$$

-احسب المجموع: $S' = v_0+v_1+\cdots+v_{15}$

نص الإجابة

1-أ – حساب b :

لدينا $a+b+c=9$

والوسط الحسابي هو: $a+c=2b$

معناه نستطيع استبدال a + c بـ 2b تصبح $2b+b=9$

هذا يكافئ $3b=9$

ومنه $b=\frac{9}{3}=3$

كتابة a و c بدلالة r :

طريقة (1):

لدينا $a+b+c=9$

نقوم باستبدال الحدود a ، b و c بالتسميات u_1 ، u_2 و u_3 تصبح

$$u_1+u_2+u_3=9$$

باستعمال عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية نحسب u_1 و u_3

$$u_n = u_p+(n-p)r$$

لدينا $u_2 = u_1+(2-1)r = u_1+r$

هذا يكافئ $u_1 = u_2-r$

ويكافئ $a = b-r$

ومنه $a = 3-r$

ولدينا $u_3 = u_2+(3-2)r = u_2+r$

هذا يكافئ $u_3 = u_2+r$

ويكافئ $c = b+r$

ومنه $c = 3+r$

طريقة (2):

لدينا $a+b+c=9$

في المتتالية الحسابية الفرق بين أي حد والذي قبله يعطينا الأساس أي $b-a=r \Rightarrow a=b-r$

ومنه $a=3-r$

وأيضا $c-b=r \Rightarrow c=b+r$

ومنه $c=3+r$

1-ب- تعيين الأساس r :

لدينا $a \times c = -16$

نقوم بتعويض $a=3-r$ و $c=3+r$ المحسوبان من الجواب السابق نجد $(3-r)(3+r)=-16$

بعد النشر نجد $9+3r-3r-r^2=-16$

هذا يكافئ $9-r^2=-16$

ويكافئ $-r^2=-16-9=-25$

$$r^2 = 25$$

ومنه

$r = \sqrt{25} = 5 \rightarrow$ مقبول

أو

$r = -\sqrt{25} = -5 \rightarrow$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة

استنتاج a و c :

لدينا $a = 3 - r = 3 - 5$

$a = -2$

ولدينا $c = 3 + r = 3 + 5$

ومنه $c = 8$

2-أ- التعبير عن u_n بدلالة n :

عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية $u_n = u_p + (n-p)r$

بالتعويض نجد $u_n = u_0 + (n-0)5$

ومنه $u_n = -2 + 5n$

2-ب- حساب u_{15} :

$u_{15} = -2 + 5(15) = -2 + 75$

ومنه $u_{15} = 73$

استنتاج المجموع S

لدينا $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية، نحسبه بالعلاقة

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right]$$

هذا يكافئ $S = \frac{15-0+1}{2}[u_0 + u_{15}]$

ويكافئ $S = \frac{16}{2}[-2 + 73]$

ومنه $S = 8(71) = 568$

حساب المجموع S'

لدينا $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$

ولدينا $8v_n - u_n = 0$

هذا يكافئ $8v_n = u_n$

ومنه $v_n = \frac{u_n}{8}$

أي $S' = \frac{S}{8}$

ومنه $S' = \frac{568}{8} = 71$

18. بكالوريا 2012 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$

1-أ- احسب بدلالة r الجدائين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$

1-ب- عين الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$

2- نضع $r = 3$

2-أ- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

2-ب- نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

بين أن: $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$

2-ج- جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$

3-أ- اكتب الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n

3-ب- تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

3-ج- استنتج الاعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا

الحل

1-أ – حساب بدلالة r الجدائين: $T = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$

باستعمال عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية نقوم بحساب كلا من u_1، u_5، u_2 و u_4 بدلالة الحد u_3 والأساس r

لدينا

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

حساب u_1 :

$u_3 = u_1 + (3-1)r = u_1 + 2r$

هذا يكافئ $7 = u_1 + 2r$

ومنه $u_1 = 7 - 2r$

حساب u_5 :

$u_5 = u_3 + (5-3)r = u_3 + 2r$

هذا يكافئ $u_5 = 7 + 2r$

ومنه $u_5 = 7 + 2r$

حساب u_2 :

$u_3 = u_2 + (3-2)r = u_2 + r$

هذا يكافئ $7 = u_2 + r$

ومنه $u_2 = 7 - r$

حساب u_4 :

$u_4 = u_3 + (4-3)r = u_3 + r$

هذا يكافئ $u_4 = 7 + r$

ومنه $u_4 = 7 + r$

حساب الجداء $T_1 = u_1 \times u_5$

لدينا $T_1 = u_1 \times u_5$

بالتعويض نجد $T_1 = (7-2r)(7+2r)$

وهو الجداء الشهير $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ يصبح

$T_1 = 7^2 - (2r)^2$

ومنه $T_1 = 49 - 4r^2$

حساب الجداء $T_2 = u_2 \times u_4$

لدينا $T_2 = u_2 \times u_4$

بالتعويض نجد $T_2 = (7-r)(7+r)$

وهو الجداء الشهير $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ يصبح

$T_2 = 7^2 - (r)^2$

ومنه $T_2 = 49 - r^2$

1-ب- تعيين الأساس r :

لدينا $T_2 - T_1 = 27$

نقوم بتعويض T_1 و T_2 من الجواب السابق نجد

$(49 - r^2) - (49 - 4r^2) = 27$

هذا يكافئ $49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27$

ويكافئ $3r^2 = 27$

أي $r^2 = \frac{27}{3} = 9$

ومنه

$r = \sqrt{9} = 3 \rightarrow$ مقبول

أو

$r = -\sqrt{9} = -3 \rightarrow$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة

2-أ- التعبير عن u_n بدلالة n :

عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية $u_n = u_p + (n-p)r$

بالتعويض نجد $u_n = u_1 + (n-1)(3)$

إذن $u_n = 1 + 3n - 3$

ومنه $u_n = 3n - 2$

2-ب- البرهان أن: $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$

لدينا $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية، نحسبه بالعلاقة

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right]$$

هذا يكافئ $S_n = \frac{n-1+1}{2}[u_1 + u_n]$

ويكافئ $S_n = \frac{n}{2}[1 + 3n - 2]$

أي $S_n = \frac{n}{2}[3n-1] = \frac{3n^2-n}{2}$

ومنه $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$

2-جـ- إيجاد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$

لدينا $S_n = 145$

هذا يكافئ $\frac{3n^2-n}{2} = 145$

ويكافئ $3n^2 - n = 145 \times 2$

ويكافئ $3n^2 - n = 290$

$3n^2 - n - 290 = 0$

نحسب المميز $\Delta = b^2 - 4\,a.c$

$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-290)$

ومنه $\Delta = 3481$

$\sqrt{\Delta} = 59$

للمعادلة حلان متمايزان

$$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-59}{6} = \frac{-58}{6}$$

الحل $n_1 = \frac{-58}{6}$ مرفوض لأنه لا ينتمي للأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

$$n_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+59}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

الحل $n_2 = 10$ مقبول لأنه ينتمي للأعداد الطبيعية $\mathbb{N}^*$

ومنه قيمة n التي تحقق $S_n = 145$ هي

$n = 10$

3-أ-كتابة الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n :

لدينا $u_n = 3n - 2$

نضيف العدد 5 لـ n فقط $u_{n+5} = 3(n+5) - 2$

هذا يكافئ $u_{n+5} = 3n + 15 - 2$

ومنه $u_{n+5} = 3n + 13$

3-ب- التحقق أن: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

لدينا $u_{n+5} = 3n + 13$

نقسم طرفي المعادلة على n تصبح

$$\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n+13}{n}$$

وهذا يكافئ $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n}$

ومنه $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

3-جـ-استنتاج الاعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا

لدينا $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

حتى يكون العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ عددا طبيعيا يجب أن يكون $3 + \frac{13}{n}$ عددا طبيعيا، بما أن العدد 3 طبيعي، والعدد $\frac{13}{n}$ يكون طبيعيا إن كان n من قواسم العدد 13 وهي: 1 و 13

اذن :يكون $\frac{u_n+5}{n}$ طبيعيا اذا كان : $n = \{1; 13\}$

19. بكالوريا 2011 الموضوع الأول

أ-(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث:

$u_0 + u_3 = 28$

أ-1- احسب u_0، ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

أ-2- احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

ب-(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$v_n = 1 - 5n$

ب-1- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها ثم استنتج اتجاه تغير ها

ب-2- احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$

جـ - نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام :

$k_n = 1 + 3^n - 5n$

- تحقق أن : $k_n = u_n + v_n$ ثم احسب المجموع :

$S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$

الحل

أ-1- حساب u_0

بما أن المتتالية (u_n) هندسية فإن عبارة الحد العام هي

$u_n = u_p \times q^{n-p}$

بتعويض $n = 3$ و $p = 0$ تصبح العبارة

$u_3 = u_0 \times 3^{3-0} \ldots\ldots (1)$

ومن المعطيات لدينا $u_0 + u_3 = 28$

ومنه $u_3 = 28 - u_0 \ldots\ldots (2)$

بمساواة (1) مع (2) نجد $u_0 \times 3^3 = 28 - u_0$

هذا يكافئ $u_0 \times 3^3 + u_0 = 28$

أي $u_0(3^3 + 1) = 28$

ومنه $u_0 = \frac{28}{28} = 1$

كتابة u_n بدلالة n

لدينا $u_n = u_p \times q^{n-p}$

$u_n = u_0 \times q^{n-0}$

هذا يكافئ $u_n = 1 \times 3^{n-0}$

ومنه $u_n = 3^n$

أ-2- حساب المجموع S_1

لدينا $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية، نحسبه بالعلاقة

$$S_1 = \text{الحد الأول}\,\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q-1}$$

هذا يكافئ $S_1 = 1\,\frac{3^{9-0+1}-1}{3-1}$

ومنه $S_1 = \frac{3^{10}-1}{2}$

ب-1- البرهان أن (v_n) متتالية حسابية

يكفي أن نبرهن أن

$$v_{n+1} - v_n = r$$

لدينا

$$v_n = 1 - 5n$$

ومنه

$$v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$$

إذن

$$v_{n+1} - v_n = [1 - 5(n+1)] - (1 - 5n)$$

هذا يكافئ

$$v_{n+1} - v_n = 1 - 5n - 5 - 1 + 5n$$

ويكافئ

$$v_{n+1} - v_n = -5$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$

استنتاج اتجاه تغير (v_n)

بما أن $v_{n+1} - v_n = -5 < 0$ هي قيمة أقل من الصفر، فمنه

نستنتج أن (v_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

ب-2- حساب المجموع S_2

$$S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$$

لدينا

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية، نحسبه بالعلاقة

$$S_2 = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right]$$

هذا يكافئ

$$S_2 = \frac{9-0+1}{2}[v_0 + v_9]$$

ولدينا

$$v_0 = 1 - 5(0) = 1$$

$$v_9 = 1 - 5(9) = -44$$

بالتعويض نجد

$$S_2 = 5(-43)$$

$$S_2 = -215$$

جـ- التحقق أن $k_n = u_n + v_n$

لدينا

$$k_n = 1 + 3^n - 5n$$

هذا يكافئ

$$k_n = 3^n + 1 - 5n$$

ومنه

$$k_n = u_n + v_n$$

حساب المجموع S

لدينا

$$S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$$

ولدينا أيضا

$$k_n = u_n + v_n$$

أي

$$S = S_1 + S_2$$

ومنه

$$S = \frac{3^{10}-1}{2} - 215$$

20. بكالوريا 2011 الموضوع الثاني

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بحديهما العام: $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$

عين في كل حالة من الحالات الخمسة في الجدول ادناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل

		اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3
1	(u_n) هي متتالية	هندسية	حسابية	لاحسابية ولا هندسية
2	الحد الخامس والاربعون للمتتالية (u_n) يساوي	-90	-92	-88
3	المجموع $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ يساوي	$n^2 + 1$	$-n^2 - n$	$-n^2 - 1$
4	(v_n) هي متتالية هندسية أساسها	$\frac{1}{9}$	9	-9
5	المتتالية (v_n)	متزايدة	متناقصة	ليست رتيبة

الحل

1-(u_n) متتالية:

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = r$$

بالتعويض نجد

$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) - (-2n)$$

هذا يكافئ

$$u_{n+1} - u_n = -2n - 2 + 2n = -2$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$

2-الحد الخامس والأربعون:

لدينا

$$u_0 + \cdots + u_{44}$$

إذن الحد الخامس والأربعون هو u_{44} لأن $44 - 0 + 1 = 45$

ومنه

$$u_{44} = -2(44) = -88$$

3-المجموع:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية، نحسبه بالعلاقة

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right]$$

هذا يكافئ

$$S_n = \frac{n-0+1}{2}[u_0 + u_n]$$

ولدينا

$$u_0 = -2(0) = 0$$

$$u_n = -2n$$

بالتعويض نجد

$$S_n = \frac{n+1}{2}[0 - 2n]$$

أي

$$S_n = (n+1)(-n)$$

ومنه

$$S_n = -n^2 - n$$

4-(v_n) متتالية هندسية:

لدينا

$$v_n = 3^{-2n}$$

هذا يكافئ

$$v_{n+1} = 3^{-2(n+1)} = 3^{-2n-2}$$

وبتطبيق قاعدة جمع الأسس $a^{x+y} = a^x . a^y$ نجد

$$v_{n+1} = 3^{-2n} . 3^{-2}$$

بما أن $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$ و $v_n = 3^{-2n}$ فإن $v_{n+1} = v_n \frac{1}{9}$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{9}$

5-(v_n) متتالية:

لدينا

$$v_n = 3^{-2n}$$

$$v_0 = 3^{-2(0)} = 3^0 = 1$$

بما أن الحد الأول موجب $(v_0 > 0)$ والأساس $\left(1 > \frac{1}{9} > -1\right)$ فإن المتتالية (v_n) متناقصة

21. بكالوريا 2010 الموضوع الأول

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$

I-1-عين أساسها وحدها الأول u_0

I-2-اكتب u_n بدلالة n

I-3-بين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n)

I-4-أحسب المجموع S : حيث $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$

II-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$

II-1- (v_n)متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحده الأول v_0

II-2-احسب بدلالة n المجموع S' :

$$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

الحل

I-1-تعيين الأساس r والحد الأول u_0 للمتتالية (u_n)

تعيين الأساس r

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية $u_n = u_p + (n-p)r$

ومنه

$u_{10} = u_0 + (10-0)r = u_0 + 10r = 31$

$u_{15} = u_0 + (15-0)r = u_0 + 15r = 46$

إذن لدينا المعادلتين

$$\begin{cases} u_0 + 10r = 31 \\ u_0 + 15r = 46 \end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة الأولى في (-1) تصبح

$$\begin{cases} -u_0 - 10r = -31 \\ u_0 + 15r = 46 \end{cases}$$

ثم بجمع المعادلتين عموديا طرفا لطرف نجد

$-u_0 + u_0 - 10r + 15r = -31 + 46$

$5r = 15$

هذا يكافئ $r = \frac{15}{5} = 3$

ومنه

تعيين الحد الأول u_0

لدينا $u_n = u_p + (n-p)r$

بتعويض الحد $u_{10} = 31$ و $r = 3$ نجد

$u_{10} = u_0 + (10-0)(3)$

هذا يكافئ $31 = u_0 + 30$

ويكافئ $u_0 = 31 - 30$

ومنه $u_0 = 1$

I-2-كتابة u_n بدلالة n

لدينا عبارة الحد العام $u_n = u_p + (n-p)r$

ولدينا $u_0 = 1$ و $r = 3$ إذن $u_n = u_0 + (n-0)(3)$

ومنه $u_n = 1 + 3n$

I-3-البرهان أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n)

نحل المعادلة $u_n = 6028$

هذا يكافئ $1 + 3n = 6028$

ويكافئ $3n = 6028 - 1$

ومنه $n = \frac{6027}{3} = 2009$

ومنه 6028 حدا من حدود المتتالية (u_n)

I-4-حساب المجموع S

لدينا $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية ونكتب

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}\right]$$

وهذا يكافئ $S = \frac{2009-0+1}{2}[u_0 + u_{2009}]$

وبما أن $u_{2009} = 1 + 3(2009) = 6028$ فإن

ومنه $S = \frac{2010}{2}[1 + 6028]$

$S = 6059145$

II-1-تعيين الأساس والحد الأول v_0 للمتتالية (v_n)

لدينا عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية هي

$v_n = v_p \times q^{n-p}$

بما أن الحد الأول هو v_0 فإن

$v_n = v_0 \times q^{n-0}$

وبالمطابقة مع العبارة $v_n = 2 \times 8^n$

نجد أن الأساس $q = 8$ والحد الأول $v_0 = 2$

II-2-حساب بدلالة n المجموع S'

لدينا $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية ونكتب

$$S_n = \text{الحد الأول}\,\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q-1}$$

وهذا يكافئ $S' = v_0\frac{q^{n-0+1}-1}{q-1}$

ويكافئ $S' = 2\frac{8^{n+1}-1}{8-1} = 2\frac{8^{n+1}-1}{7}$

ومنه $S' = 2\frac{8^{n+1}-1}{7}$

22. بكالوريا 2010 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N، أساسها q وحدها الأول u_0 حيث: $u_1 = 6$ و $u_4 = 48$

1-أ-احسب الأساس والحد الأول للمتتالية (u_n)

1-ب-استنتج أن عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي: $u_n = 3 \times 2^n$

2-أ-علما أن $2^8 = 256$ ، بين أن العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (u_n)

2-ب-أحسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$

3-(v_n) متتالية عددية معرفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = 2v_n - 1$

3-أ-احسب: v_1 ، v_2 ، v_3

3-ب-برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3 \times 2^n + 1$

3-جـ-احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$

الحل

1-أ - حساب الأساس q للمتتالية (u_n)

بما أن المتتالية (u_n) هندسية وحدها الأول u_0 فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_p \times q^{n-p}$

بتعويض $n = 4$ و $p = 1$ تصبح العبارة $u_4 = u_1 \times q^{4-1}$

ومن المعطيات لدينا $u_4 = 48$ و $u_1 = 6$ نعوضهما نجد

$48 = 6 \times q^3$

هذا يكافئ $q^3 = \frac{48}{6} = 8$

نقوم بالآلة الحاسبة بالجذر الثلاثي للعدد 8 نجد $q=2$

حساب الحد الأول u_0

لدينا $u_n = u_p \times q^{n-p}$

ومنه $u_1 = u_0 \times 2^{1-0}$

هذا يكافئ $6 = u_0 \times 2$

أي $u_0 = \frac{6}{2} = 3$

ومنه $u_0 = 3$

1-ب - استنتاج أن عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي 3×2^n

لدينا $u_n = u_p \times q^{n-p}$

هذا يكافئ $u_n = u_0 \times 2^{n-0}$

ومنه $u_n = 3 \times 2^n$

ب- التبيين أن 768 هو حدا من حدود المتتالية (u_n):

768 حد من حدود المتتالية (u_n) معناه $u_n = 768$

$$3 \times 2^n = 768$$

هذا يكافئ

من المعطيات لدينا $256 = 2^8$ نعوضها $2^n = 2^8$

ومنه $n = 8$

وبما أن العدد 8 طبيعي فإن 768 حد من حدود المتتالية (u_n)

ج- حساب S بدلالة n

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_7$$

لدينا S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية، نحسبه بالعلاقة

$$S = \text{الحد الأول} \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

$$S = u_1 \frac{2^{7-0+1} - 1}{2 - 1}$$

هذا يكافئ

$$S = 3 \frac{2^8 - 1}{1}$$

ويكافئ

$$S_n = 3(2^8 - 1)$$

ومنه

$$S_n = 3(255) = 765$$

2- أ- حساب v_1 و v_2 و v_3

$$v_1 = 2v_0 - 1$$
$$= 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$$
$$v_2 = 2v_1 - 1$$
$$= 2(7) - 1 = 14 - 1 = 13$$
$$v_3 = 2v_2 - 1$$
$$= 2(13) - 1 = 26 - 1 = 25$$

ب- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = 3 \times 2^n + 1$$

نسمي $p(n)$ الخاصية $"v_n = 3 \times 2^n + 1"$

من أجل $n = 0$ لدينا $v_0 = 4$

و $3 \times 2^0 + 1 = 3 \times 1 + 1$

$$= 4 = v_0$$

أي $p(0)$ محققة

ونفرض صحة $p(n)$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

أي $v_n = 3 \times 2^n + 1$

ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة

لدينا:

$$v_{n+1} = 2v_n - 1 \ldots\ldots\ldots (1)$$

ولدينا من الفرضية:

$$v_n = 3 \times 2^n + 1 \ldots\ldots (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$v_{n+1} = 2(3 \times 2^n + 1) - 1$$
$$= 2 \times 3 \times 2^n + 2 - 1$$
$$= 3 \times 2^{n+1} + 1$$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ محققة

أي أن $v_n = 3 \times 2^n + 1$

ج- حساب المجموع S' حيث:

$$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$$

لدينا: $v_n = 3 \times 2^n + 1$

أي أن:

$$\begin{cases} v_0 = 3 \times 2^0 + 1 \\ v_1 = 3 \times 2^1 + 1 \\ \vdots \\ v_7 = 3 \times 2^7 + 1 \end{cases}$$

بالجمع العمودي طرفا لطرف نجد:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_7$$
$$= [3 \times 2^0 + 1] + [3 \times 2^1 + 1] + \cdots + [3 \times 2^7 + 1]$$
$$S' = [3 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + \cdots + 3 \times 2^7] + 1[7 - 0 + 1]$$
$$S' = S + 8$$
$$S' = 3\left[1 \frac{2^8 - 1}{2 - 1}\right] + 8$$
$$= 3(2^8 - 1) + 8$$
$$= 773$$

23. بكالوريا 2009 الموضوع الأول

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ بالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$

1-أ-أحسب الأساس r للمتتالية (u_n)

1-ب-أحسب الحد العاشر

2-أكتب عبارة u_n بدلالة n

3-بين أن العدد (-2008) هو حدا من حدود (u_n)، محددا رتبته

4-أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$

الحل:

1-أ - حساب الأساس r للمتتالية (u_n)

بما أن المتتالية (u_n) حسابية وحدها الأول $u_1 = 2$ فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_1 + (n-1)r$

باستعمال عبارة الحد العام نقوم بحساب u_2 و u_5 كالتالي

$$u_2 = 2 + (2-1)r = 2 + r$$
$$u_5 = 2 + (5-1)r = 2 + 4r$$

نعوض كلا من u_2 و u_5 في العلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$ نجد

$$(2 + r) - 2(2 + 4r) = 19$$

هذا يكافئ $2 + r - 4 - 8r = 19$

أي $-7r = 21$

ومنه $r = -\frac{21}{7} = -3$

1-ب- حساب الحد العاشر u_{10}

باستعمال عبارة الحد العام نقوم بحساب u_{10}

لدينا $u_n = u_1 + (n-1)r$

أي $u_{10} = 2 + (10-1)(-3) = 2 + 9(-3)$

ومنه $u_{10} = -25$

2-كتابة عبارة u_n بدلالة n

هي نفسها عبارة الحد العام ونكتب $u_n = u_1 + (n-1)r$

بتعويض $u_1 = 2$ و $r = -3$ تصبح

$$u_n = 2 + (n-1)(-3)$$

هذا يكافئ $u_n = 2 - 3n + 3$

ومنه $u_n = -3n + 5$

3-تبيان أن 2008- حدا من حدود (u_n)

لدينا $u_n = -2008$

هذا يكافئ $-3n + 5 = -2008$

$$-3n = -2008 - 5$$

أي $-3n = -2013$

ومنه $n = \frac{-2013}{-3} = 671$

بما أن العدد $671 \in \mathbb{N}$ فإن -2008 هو حد من حدود المتتالية (u_n) ورتبته هي 671

4-حساب المجموع S :

لدينا $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية، نحسبه بالعلاقة

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right]$$

هذا يكافئ $S = \frac{671-1+1}{2}[u_1 + u_{671}]$

ومنه $S = \frac{671}{2}[-2006]$

24. بكالوريا 2009 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب

1-عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_0 اذا علمت أن: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$

2-تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$

3-أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ،

استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$

الحل

1-تعيين أساس المتتالية (u_n)

بما أن المتتالية (u_n) هندسية فالوسط الهندسي هو:

$$u_3 \times u_5 = (u_4)^2$$

هذا يكافئ $(u_4)^2 = 144 \times 576 = 82944$

ومنه
$$\begin{cases} u_4 = \sqrt{82944} = 288 \\ \text{أو} \\ u_4 = \sqrt{82944} = -288 \end{cases}$$

الحل $u_4 = 288$ مقبول والحل $u_4 = -288$ مرفوض لأن المتتالية (u_n) أساسها موجب

ومنه $u_4 = 288$

ولدينا الشكل العام للمتتالية الهندسية: $u_{n+1} = u_n \times q$

هذا يكافئ $u_4 = u_3 \times q$

بالتعويض نجد $288 = 144 \times q$

ومنه $q = \frac{288}{144} = 2$

ومنه أساس المتتالية (u_n) هو $q = 2$

حساب الحد الأول u_0

لدينا عبارة الحد العام: $u_n = u_p \times q^{n-p}$

هذا يكافئ $u_3 = u_0 \times 2^{3-0}$

بالتعويض نجد $144 = u_0 \times 2^3$

ومنه $u_0 = \frac{144}{2^3} = 18$

2-التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$

لدينا عبارة الحد العام: $u_n = u_p \times q^{n-p}$

ولدينا $u_0 = 18$ و $q = 2$ إذن $u_n = 18 \times 2^n$

3-حساب المجموع S_n بدلالة n

إن S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = 2$ و $u_0 = 18$ ونكتب علاقة المجموع:

$$S_n = \text{الحد الأول للمجموع}\ \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

هذا يكافئ $S_n = u_0 \frac{2^{n-0+1}-1}{2-1}$

ومنه $S_n = 18(2^{n+1} - 1)$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$

لدينا $S_n = 1134$

هذا يكافئ $18(2^{n+1} - 1) = 1134$

ويكافئ $2^{n+1} - 1 = \frac{1134}{18}$

ويكافئ $2^n \cdot 2^1 = 63 + 1$

إذن $2^n = \frac{64}{2} = 32$

بما أن $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ فإن $2^n = 2^5$

ومنه قيمة العدد الطبيعي n هي $n = 5$

25. بكالوريا 2008 الموضوع الأول

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$

1-أحسب u_0, u_1, u_2

2-بين أن (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها ـ عين اتجاه تغير (u_n)

3-تحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n)، ما رتبته؟

4- أحسب المجموعة: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$

الحل

1-حساب u_0 ، u_1 ، u_2

حساب u_0 لدينا $u_n = 3n + 1$

نعوض العدد 0 في n نجد $u_0 = 3(0) + 1 = 0 + 1$

ومنه $u_0 = 1$

حساب u_1 $u_1 = 3(1) + 1 = 3 + 1$

ومنه $u_1 = 4$

حساب u_2 $u_2 = 3(2) + 1 = 6 + 1$

ومنه $u_2 = 7$

2-البرهان أن (u_n) متتالية حسابية:

حتى تكون (u_n) متتالية حسابية يجب أن نجد $u_{n+1} - u_n = r$

لدينا $u_n = 3n + 1$

نضيف العدد 1 إلى n نجد $u_{n+1} = 3(n+1) + 1$

إذن تصبح $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1)$

هذا يكافئ $u_{n+1} - u_n = 3n + 3 + 1 - 3n - 1$

ومنه $u_{n+1} - u_n = 3$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$

تعيين اتجاه تغير (u_n):

بما أن $r = 3$ والعدد $3 > 0$ أي العدد 3 موجب فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

3-التحقق أن 2008 حدا من حدود المتتالية (u_n):

العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) معناه $u_n = 2008$

هذا يكافئ $3n + 1 = 2008$

أي $3n = 2007$

ومنه $n = \frac{2007}{3} = 669$

وبما أن العدد 669 طبيعي فهو حد من حدود المتتالية (u_n)

تعيين رتبته:

$$n = 669$$

بما أن المتتالية (u_n) تنطلق من $n = 0$ إلى غاية $n = 669$ فإن

$$669 - 0 + 1 = 670$$

ومنه رتبته هي 670

لحساب المجموع S :

لدينا

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية، نحسبه بالعلاقة

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left[\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right]$$

هذا يكافئ

$$S = \frac{669-0+1}{2}[u_0 + u_{669}]$$

أي

$$S = \frac{670}{2}[1 + 2008]$$

ومنه

$$S = 335[2009] = 673015$$

26. بكالوريا 2008 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1-احسب u_2, u_3, u_4

2-من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$

2-أ-أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1

2-ب-اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

2-ج-نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ، احسب S_n بدلالة n

2-د-عين n علما أن $S_n = 1016$

الحل

1-حساب u_2 ، u_3 و u_4

حساب u_2 :

لدينا

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

نعوض العدد 1 في n نجد $u_2 = 2u_1 + 1$

ونعلم أن $u_1 = 7$ إذن $u_2 = 2(7) + 1$

ومنه $u_2 = 15$

حساب u_3 :

لدينا

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

نعوض العدد 2 في n نجد $u_3 = 2u_2 + 1$

ووجدنا سابقا أن $u_2 = 15$ إذن $u_3 = 2(15) + 1$

ومنه $u_3 = 31$

حساب u_4 :

لدينا

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

نعوض العدد 3 في n نجد $u_4 = 2u_3 + 1$

ووجدنا أن $u_3 = 31$ إذن $u_4 = 2(31) + 1$

ومنه $u_4 = 63$

2-أ-إثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

$$v_n = u_n + 1$$

نضيف العدد 1 إلى n نجد $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$

نعوض $u_{n+1} = 2u_n + 1$ نجد $v_{n+1} = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2$

نقوم باستخراج العدد 2 كعامل مشترك تصبح

ومنه $v_{n+1} = 2(u_n + 1)$

ومنه $v_{n+1} = 2v_n$ ، (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$

حساب v_1

لدينا

ومنه $v_n = u_n + 1$

$v_1 = u_1 + 1$

ونعلم أن $u_1 = 7$ إذن $v_1 = 7 + 1 = 8$

2-ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية هي

$$v_n = v_p . q^{n-p}$$

$$v_n = v_1 . q^{n-1}$$

بتعويض v_1 و q نجد $v_n = 8.(2)^{n-1}$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا

ومنه $v_n = u_n + 1$

$u_n = v_n - 1$

لدينا $v_n = 8.(2)^{n-1}$ وبعد تعويضها نجد

$$u_n = 8.(2)^{n-1} - 1$$

2-ج – حساب S_n بدلالة n

لدينا $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

وهو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية، نحسبه بالعلاقة

$$S_n = \text{الحد الأول}\,\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

هذا يكافئ $S_n = v_1\frac{2^{n-1+1}-1}{2-1}$

ويكافئ $S_n = 8\frac{2^n-1}{1}$

ومنه $S_n = 8(2^n - 1)$

2-د – تعيين n علما أن $S_n = 1016$

لدينا $S_n = 1016$

هذا يكافئ $8(2^n - 1) = 1016$

ويكافئ $(2^n - 1) = \frac{1016}{8} = 127$

أي $2^n = 127 + 1 = 128$

إذن $2^n = 128$

لإيجاد n نقوم بقسمة العدد 128 على الرقم 2 إلى غاية الوصول للرقم 1 بالشكل التالي

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

إذن $128 = 2^7$

ومنه $2^n = 2^7$

إذن $n = 7$

و n هو عدد المرات التي يتكرر فيها الرقم 2 على جهة اليمين

إذن قيمة n حتى يكون $S_n = 1016$ هي $n = 7$

محور القسمة الاقليدية في Z

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف:
a و b عددان صحيحان و b غير معدوم، القول أن العدد b يقسم العدد a يعني وجود عدد صحيح k حيث
$$a = kb$$
نقول كذلك أن b قاسم للعدد a أو أن a مضاعف للعدد b
نكتب $b|a$ ونقرأ b يقسم a
مثال: $(-6) \times (-8) = 48$ ومنه $(-6)|48$

ملاحظة:
للعددين الصحيحين a و $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة
من أجل كل عدد صحيح a ، ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم b ، توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث: $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$
تسمى عملية البحث عن الثنائية $(q;r)$ بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b
يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b
مثال: $95 = 7 \times 13 + 4$. 13 هو حاصل قسمة 95 على 7 و 4 هو باقي قسمة 95 على 7

ملاحظة
يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح b غير معدوم
نجد $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$

الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف
n عدد طبيعي غير معدوم . القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.
ونرمز بـ $a \equiv b[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n

مثال :
$$20 = 3 \times 6 + 2$$
ومنه
$$20 \equiv 2[6]$$
ونقول أن 20 و 2 متوافقان بترديد 6

ملاحظة: من أجل كل عدد صحيح x $x \equiv 0[1]$

مبرهنة
a و b عددان صحيحان، و n عدد طبيعي غير معدوم يكون للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان $a - b$ مضاعفا للعدد n

مثال
-1 $7 \equiv 4[3]$ لأن $7 - 4 = 3$ وهو مضاعف 3
-2 $7 \equiv 1[3]$ لأن $7 - 1 = 6$ وهو مضاعف 3

نتيجة:
a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a b متوافقان بترديد n اذا وفقط اذا كان $a - b$ مضاعف لـ n

خواص الموافقات

خاصية 1:
من أجل كل عدد غير معدوم n ، ومن أجل كل عدد صحيح a لدينا : $a \equiv a[n]$

خاصية 2:
a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم :
إذا كان: $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$

خاصية 3 : (خاصية التعدي)
n عدد طبيعي غير معدوم a و b و c أعداد صحيحة
إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$

خاصية 4 :(خاصية التلاؤم مع الجمع)
n عدد طبيعي غير معدوم a ، b ، c و d أعداد صحيحة .
اذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن :
$$a + c \equiv b + d[n]$$

خاصية 5 :(خاصية التلاؤم مع الضرب)
n عدد طبيعي غير معدوم ، a ، b ، c و d أعداد صحيحة .
اذا كان: $a \equiv b[n]$ $c \equiv d[n]$ فإن :
$$a \times c \equiv b \times d[n]$$

خاصية 6 :
n عدد طبيعي غير معدوم a و b عددان صحيحان
من أجل كل عدد صحيح k ، اذا كان $a \equiv b[n]$ فإن
$$ka \equiv kb[n]$$

خاصية 7 :
n و p عددان طبيعيان غير معدومين a و b عددان صحيحان
اذا كان: $a \equiv b[n]$ فإن: $a^p \equiv b^p[n]$

تمرين تدريبي 1:
ما هو باقي قسمة العدد $(2007)^{2008}$ على 2:
الحل: لدينا $2007 = 2 \times 1003 + 6$
ومنه $2007 \equiv 1[2]$ وعليه حسب الخاصية (7)
فإن: $(2007)^{2008} \equiv 1^{2008}[2]$
وبالتالي $(2007)^{2008} \equiv 1[2]$

تمرين تدريبي 2:
عين باقي قسمة -5817 على 251
الحل : بقسمة العدد 5817 على 251 نحصل على
$$5817 = 251 \times 23 + 44$$
$$5817 \equiv 44[251]$$
ومنه
نضرب الطرفين في -1 نحصل على $-5817 \equiv -44[251]$ (خاصية 6)
نعلم أن $251 \equiv 0[251]$ ومنه $0 \equiv 251[251]$ (الخاصية 2)
ولدينا
$$-5817 \equiv -44[251]$$
$$0 \equiv 251[251]$$
اذن من الخاصية 4 نحصل على $-5817 \equiv 207[251]$
اذن باقي القسمة -5817 على 251 هو 207 لأن
$$0 < 207 < 251$$

تمرين تدريبي 3:

x عدد صحيح ، باقي قسمته على 7 هو 2
عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة التالية
$x+5$ ، $-15x$ ، x^3

الحل :

لدينا $x \equiv 2[7]$

ومنه $x-5 \equiv 2-5[7]$

$x-5 \equiv -3[7]$

نضيف الترديد 7

$x-5 \equiv -3+7[7]$

ومنه $\boxed{x-5 \equiv 4[7]}$

لدينا $x \equiv 2[7]$

ومنه $-15x \equiv -15(2)[7]$

$-15x \equiv -30[7]$

$-15x \equiv -2[7]$

نضيف الترديد 7

$\boxed{-15x \equiv 5[7]}$

لدينا $x \equiv 2[7]$

ومنه $x^3 \equiv 8[7]$

$\boxed{x^3 \equiv 1[7]}$

1. تمرين مقترح وهام جدا 01

ليكن العددين الصحيحين $a = 206$ و $b = -9$

1-أ- تحقق أن : $a+b \equiv 1[7]$

1-ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[a^2+2ab+b^2]$ على 7

2-أ- بين أن : $(a+b)^{2013} - 5 \equiv 3[7]$

2-ب- عين باقي قسمة العدد $(a+b)^{1434} + 13$ على 7

3- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $3^{6k} \equiv 1[7]$ ، ثم أكمل الجدول التالي

قيم n بدلالة k	$6k$	$6k+1$	$6k+2$
بواقي قسمة 3^n على 7			
قيم n بدلالة k	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 3^n على 7			

4- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها :

$a^n + 3b + 29 \equiv 0[7]$

الحل ✍

1-أ- التحقق أن $a+b \equiv 1[7]$

لدينا $a+b \equiv 206-9[7]$

ومنه $a+b \equiv 197[7]$

لدينا $197 = 28 \times 7 + 1$ ومنه

$a+b \equiv 1[7]$

1-ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[a^2+2ab+b^2]$ على 7

لدينا $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$

لدينا من السؤال السابق

ومنه $a+b \equiv 1[7]$

$(a+b)^2 \equiv 1[7]$

أي

$a^2+2ab+b^2 \equiv 1[7]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد $[a^2+2ab+b^2]$ على 7 هو 1

2-أ- اثبات أن : $(a+b)^{2013} - 5 \equiv 3[7]$

لدينا

$a+b \equiv 1[7]$

ومنه

$(a+b)^{2013} \equiv 1[7]$

$(a+b)^{2013} - 5 \equiv -4[7]$

بإضافة الترديد نجد

$(a+b)^{2013} - 5 \equiv 3[7]$

2-ب- تعيين باقي قسمة العدد $(a+b)^{1434} + 13$ على 7

لدينا

$a+b \equiv 1[7]$

ومنه

$(a+b)^{1434} \equiv 1[7]$

نضيف 13 الى الطرفين

$(a+b)^{1434} + 13 \equiv 14[7]$

$(a+b)^{1434} + 13 \equiv 0[7]$

ومنه الباقي هو 0

3- بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $3^{6k} \equiv 1[7]$

لدينا $3^6 = 729$ ومنه

$3^6 \equiv 729[7]$

لدينا $729 = 104 \times 7 + 1$ ومنه

$3^6 \equiv 1[7]$

$3^{6k} \equiv 1^k[7]$

$3^{6k} \equiv 1[7]$

اكمال الجدول

$3^{6k} \equiv 1[7]$

$3 \times 3^{6k} \equiv 1 \times 3[7]$

$\boxed{3^{6k+1} \equiv 3[7]}$

$3^2 \times 3^{6k} \equiv 1 \times 3^2[7]$

$3^{6k+2} \equiv 9[7]$

$\boxed{3^{6k+2} \equiv 2[7]}$

$3^3 \times 3^{6k} \equiv 1 \times 3^3[7]$

$3^{6k+3} \equiv 27[7]$

$\boxed{3^{6k+3} \equiv 6[7]}$

$3^4 \times 3^{6k} \equiv 1 \times 3^4[7]$

$3^{6k+4} \equiv 81[7]$

$\boxed{3^{6k+4} \equiv 4[7]}$

$3^5 \times 3^{6k} \equiv 1 \times 3^5[7]$

$3^{6k+5} \equiv 243[7]$

$\boxed{3^{6k+5} \equiv 5[7]}$

قيم n بدلالة k	$6k$	$6k+1$	$6k+2$
بواقي قسمة 3^n على 7	1	3	2
قيم n بدلالة k	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 3^n على 7	6	4	5

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها : $a^n + 3b + 29 \equiv 0[7]$

لدينا $a = 206$

ومنه $206 = 29 \times 7 + 3$

أي $a \equiv 3[7]$

وبالتالي $a^n \equiv 3^n[7]$

ومنه العبارة $a^n + 3b + 29 \equiv 0[7]$ تكافئ

$$3^n + 3(-9) + 29 \equiv 0[7]$$
$$3^n - 27 + 29 \equiv 0[7]$$
$$3^n + 2 \equiv 0[7]$$
$$3^n \equiv -2[7]$$

وبالتالي $3^n \equiv 5[7]$

من الجدول نجد $n = 6k + 5 \quad k \in \mathbb{N}$

2. تمرين مقترح وهام جدا 02

x و y عددان صحيحان حيث

$$x \equiv 3[10]$$
$$y \equiv 9[10]$$

1- بين أن العدد $2x + y + 5$ يقبل القسمة على 10

2- عين باقي قسمة العدد $x^2 + y^2$ على 10

3- تحقق أن $y \equiv -1[10]$

- استنتج باقي قسمة كل من العددين y^{2011} و y^{2012} على 10 و y^{2015} و y^{1436}

4- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 10

5- استنتج باقي قسمة x^{2012} على 10

الحل

1- اثبات أن العدد $2x + y + 5$ يقبل القسمة على 10

لدينا $x \equiv 3[10]$

ومنه $2x \equiv 6[10] \ldots(1)$

ولدينا $y \equiv 9[10] \ldots(2)$

بجمع (1) و (2) مع إضافة 5 نجد

$$2x + y + 5 \equiv 6 + 9 + 5[10]$$
$$2x + y + 5 \equiv 20[10]$$
$$2x + y + 5 \equiv 0[10]$$

ومنه العدد $2x + y + 5$ يقبل القسمة على 10

2- تعيين باقي قسمة العدد $x^2 + y^2$ على 10

لدينا $x \equiv 3[10]$

ومنه $x^2 \equiv 3^2[10]$

أي $x^2 \equiv 9[10] \ldots(1)$

ولدينا $y \equiv 9[10]$

ومنه

وبالتالي $y^2 \equiv 9^2[10]$

أي $y^2 \equiv 81[10]$

$y^2 \equiv 1[10] \ldots(2)$

بجمع (1) و (2) نتحصل على

$$x^2 + y^2 \equiv 10[10]$$
$$x^2 + y^2 \equiv 0[10]$$

ومنه العدد $x^2 + y^2$ يقبل القسمة على 10

3- التحقق أن $y \equiv -1[10]$

لدينا $y \equiv 9[10]$

بطرح الترديد 10 نجد

$$y - 10 \equiv 9 - 10[10]$$

نعلم أن $10 \equiv 0[10]$ ومنه

$$y \equiv -1[10]$$

- استنتاج باقي قسمة كل من العددين y^{2011} و y^{2012} على 10 و y^{2015} و y^{1436}

ولدينا $y \equiv 9[10]$

ومنه $y \equiv -1[10]$

ومنه $y^{2011} \equiv (-1)^{2011}[10]$

ومنه $y^{2011} \equiv -1[10]$

لأن 2011 عدد فردي

وبالتالي $\boxed{y^{2011} \equiv 9[10]}$

لدينا $y \equiv -1[10]$

ومنه $y^{2012} \equiv (-1)^{2012}[10]$

ومنه $\boxed{y^{2012} \equiv 1[10]}$

لأن 2012 عدد زوجي

وبالتالي

$$y^{2015} \equiv 9[10]$$

و $y^{1436} \equiv 1[10]$

4- دراسة حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 10

$n = 0 \quad 3^0 \equiv 1[10]$

$n = 1 \quad 3^1 \equiv 3[10]$

$n = 2 \quad 3^2 \equiv 9[10]$

$n = 3 \quad 3^3 \equiv 7[10]$

$n = 4 \quad 3^4 \equiv 1[10]$

ومنه دور القسمة هو 4

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$3^n \equiv$	1	3	9	7	$[10]$

بواقي قسمة 3^n على 10 هي $\{1;3;9;7\}$

5- استنتاج باقي قسمة x^{2012} على 10

لدينا $x \equiv 3[10]$

ومنه $x^{2012} \equiv 3^{2012}[10]$

ومنه $x^{2012} \equiv 3^{503\times4}[10]$

من الجدول السابق لدينا

$$3^{4k} \equiv 0[10]$$

ومنه $x^{2012} \equiv 0[10]$

وبالتالي باقي قسمة x^{2012} على 10 هو 0

3. تمرين مقترح وهام جدا 03

a و b عددان طبيعيان حيث : $a = 2011$ و $b = -1432$

1- ما هو باقي وحاصل القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 11

2- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد : $2a^2 + 3b$ على 11

3- عين كل الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون

$$n + 3a \equiv 0[11]$$

ثم عين الأعداد الطبيعية n الأصغر من أو تساوي 39 بحيث

$$n + 3a \equiv 0[11]$$

الحل

1- باقي وحاصل القسمة الإقليدية لكل من a و b على 11

لدينا $a = 2011$

$$2011 = 11(182) + 9$$

الباقي هو 9 وحاصل القسمة 182 ومنه

$$a \equiv 9[11]$$

ولدينا $b = -1432$

$$-1432 \equiv 11(-130) - 2$$
$$-1432 \equiv -2[11]$$
$$-1432 \equiv 9[11]$$
$$b \equiv 9[11]$$

الباقي هو 9 وحاصل القسمة 130−

وبالتالي العددان a و b متوافقان بترديد 11 لأن لهما نفس الباقي

2- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد : $2a^2 + 3b$ على 11

لدينا

$$a \equiv 9[11]$$
$$b \equiv 9[11]$$

ومنه

$$2a^2 + 3b \equiv 2(9)^2 + 3(9)[10]$$
$$2a^2 + 3b \equiv 162 + 27[10]$$
$$2a^2 + 3b \equiv 189[10]$$

لدينا $189 \equiv 2[11]$ ومنه

$$2a^2 + 3b \equiv 2[10]$$

ومنه الباقي هو 2

3- تعيين كل الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $n + 3a \equiv 0[11]$

لدينا $a \equiv 9[11]$

ومنه $n + 3a \equiv 0[11]$ تكافئ

$$n + 3 \times 9 \equiv 0[11]$$
$$n + 27 \equiv 0[11]$$

أي

$$n + 5 \equiv 0[11]$$

لأن $27 \equiv 5[11]$

ومنه

$$n \equiv -5[11]$$

بإضافة الترديد

$$n \equiv -5 + 11[11]$$

أي

$$n \equiv 6[11]$$

ومنه

$$n = 11k + 6 \qquad k \in \mathbb{N}$$

- تعيين الأعداد الطبيعية n الأصغر من أو تساوي 39 بحيث $n + 3a \equiv 0[11]$

لدينا من الجواب السابق

$$n = 11k + 6$$

ومنه الأعداد الطبيعية n الأصغر من أو تساوي 39 بحيث

$$n + 3a \equiv 0[11]$$

$k = 0$	$n = 6$
$k = 1$	$n = 17$
$k = 2$	$n = 28$
$k = 3$	$n = 39$

ومنه $n \in \{6, 17, 28, 39\}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

4. تمرين مقترح وهام جدا 04

a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 3[5]$ و $b \equiv 4[5]$

1- بين أن العدد $2a + b$ يقبل القسمة على 5

2- عين باقي قسمة العدد $2a^2 + b^2$ على 5

3- تحقق أن $b \equiv -1[5]$

4- استنتج باقي قسمة b^{2007} و b^{1428} على 5.

الحل

1- بيان أن العدد $2a + b$ يقبل القسمة على 5

لدينا $a \equiv 3[5]$

بالضرب في 2 $\quad 2a \equiv 6[5]$

ولدينا $b \equiv 4[5]$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$$2a + b \equiv 6 + 4[5]$$

أي

$$2a + b \equiv 10[5]$$
$$2a + b \equiv 0[5]$$

ومنه العدد $2a + b$ يقبل القسمة على 5

2- تعيين باقي قسمة العدد $2a^2 + b^2$ على 5

لدينا $a \equiv 3[5]$

ومنه

$$a^2 \equiv 3^2[5]$$
$$a^2 \equiv 9[5]$$
$$2a^2 \equiv 18[5]$$
$$2a^2 \equiv 3[5] \quad \ldots\ldots (1)$$

ولدينا $b \equiv 4[5]$

ومنه

$$b^2 \equiv 4^2[5]$$
$$b^2 \equiv 16[5]$$
$$b^2 \equiv 1[5] \quad \ldots\ldots (2)$$

بالجمع بين (2) و (1) نجد $2a^2 + b^2 \equiv 4[5]$

3- التحقق أن $b \equiv -1[5]$

لدينا $b \equiv 4[5]$

ومنه $b \equiv 4 - 5[5]$

وبالتالي $b \equiv -1[5]$

4- استنتاج باقي قسمة b^{2007} و b^{1428} على 5.

$$b \equiv -1[5]$$
$$b^{2007} \equiv (-1)^{2007}[5]$$

بما ان 2007 عدد فردي فإن : $b^{2007} \equiv -1[5]$

$$b^{2007} \equiv 4[5]$$

$$b \equiv -1[5]$$
$$b^{1428} \equiv -1^{1428}[5]$$

بما أن 1428 عدد زوجي فإن : $b^{1428} \equiv 1[5]$

1. بكالوريا 2019 الموضوع الأول

a و b عددان طبيعيان حيث : $a = 2019$ و $b = 2969$

1-أ-عين باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين a و b على 7

ب-استنتج أن العددين a و $3b$ متوافقان بترديد 7

2-بين أن : $9a + b \equiv 0[7]$

3-تحقق أن : $2a \equiv -1[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد $2^{2969} \times a^{2969}$ على 7

4-عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $b^n + an + 2 \equiv 0[7]$

الحل

1-أ- تعيين باقي قسمة a و b على 7

لدينا $a = 2019$ ،
$a = 7 \times 288 + 3$
من الشكل $a = 7k + 3$
إذن $a \equiv 3[7]$

وكذلك لدينا $b = 2969$
$b = 7 \times 424 + 1$
من الشكل $b = 7k + 1$
ومنه $b \equiv 1[7]$

ب-الاستنتاج أن العددين a و $3b$ متوافقان بترديد 7

لدينا مما سبق $b \equiv 1[7]$
ومنه $3b = 3 \times 1[7]$
أي $3b \equiv 3[7]$

نلاحظ أن $3b$ و a لهما نفس الباقي بالقسمة على 7 فهما متوافقان بترديد 7

2-البرهان أن $9a + b \equiv 0[7]$

لدينا $a \equiv 3[7]$ ، ومنه $9a \equiv 9 \times 3[7]$
$9a \equiv 27[7]$
ومنه $9a \equiv 6[7]$
$9a \equiv -1[7] \ldots\ldots\ldots(1)$
$b \equiv 1[7] \ldots\ldots\ldots(2)$

بالجمع بين (1) و (2) نجد :
ومنه $9a + b \equiv -1 + 1[7]$
$9a + b \equiv 0[7]$

3-التحقق أن $2a \equiv -1[7]$

لدينا مما سبق
أي $a \equiv 3[7]$
ومنه $2a \equiv 6[7]$
$2a \equiv -1[7]$
$(2a)^{2969} \equiv (-1)^{2969}[7]$
لأن 2969 عدد فردي $(2a)^{2969} \equiv -1[7]$

$2^{2969} \times a^{2969} \equiv -1[7]$
$2^{2969} \times a^{2969} \equiv 6[7]$
الباقي هو 6

4- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث $b^n + an + 2 \equiv 0[7]$

لدينا مما سبق : $b \equiv 1[7]$
$b^n \equiv 1^n[7]$
$b^n \equiv 1[7]$

$b^n + 2 \equiv 3[7]$
وحتى يكون $b^n + an + 2 \equiv 0[7]$
يجب أن يكون : $an \equiv -3[7]$
ومما سبق : $a \equiv 3[7]$
ومنه $\frac{an}{a} \equiv -\frac{3}{3}[7]$
(شرط أن تبقى القسمة في $\mathbb{Z}$)
$n \equiv -1[7]$
ومنه $n \equiv 6[7]$
$n = 7k + 6$ حيث $k \in \mathbb{N}$

2. بكالوريا 2019 الموضوع الثاني

a و b العددان الطبيعيان حيث : $a = 2019$ و $b = 1441$

1-تحقق أن : $a \equiv 13[17]$

2-بين أن : a و b متوافقان بترديد 17 ، ثم استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد b على 17

3-بين أن $a \times b \equiv -1[17]$
ثم استنتج أن $3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 0[17]$

4-ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 13^n على 17

5-بين أن :
$2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 0[17]$

6-عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق :
$n + 1954^{1962} + 16 \equiv 0[17]$

الحل

1-باقي قسمة a على 17

لدينا $a = 17 \times 118 + 13$
من الشكل : $a = 17k + 13$
وبالتالي $a \equiv 13[17]$

2-اثبات أن a و b متوافقان بترديد 17 :

أي نثبت أن : $a - b \equiv 0[17]$
لدينا $a - b = 2019 - 1441$
$a - b = 578$
العدد 578 يقبل القسمة على 17 إذن : $578 \equiv 0[17]$
ومنه $a - b \equiv 0[17]$
وبالتالي لهما نفس الباقي بالقسمة على 17 وبما أن :
$a \equiv 13[17] \ldots..(1)$
فإن $b \equiv 13[17] \ldots..(2)$

3- اثبات أن $a \times b \equiv -1[17]$

من (1) و(2) بالضرب نجد :
$a \times b \equiv 13 \times 13[17]$
$a \times b \equiv 169[17]$
بالحساب نجد : $169 \equiv -1[17]$
$a \times b \equiv -1[17] \ldots\ldots(*)$
اذن :

-الاستنتاج

من العلاقة (*) وبالتربيع نجد
$(a \times b)^2 \equiv (-1)^2[17]$
$(a \times b)^2 \equiv 1[17]$
بالضرب نجد : $3a^2 \times b^2 \equiv 3[17]$
بإضافة 14 نجد :

$3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 3 + 14[17]$

$3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 17[17]$

ومنه : $3a^2 \times b^2 + 4 \equiv 0[17]$

4-إيجاد البواقي :

$13^0 \equiv 1[17]$

$13^1 \equiv 13[17]$

$13^2 \equiv 16[17]$

$13^3 \equiv 4[17]$

$13^4 \equiv 1[17]$

الدور هو 4

ومنه مجموعة البواقي حسب

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$13^n \equiv$	1	13	16	4	[17]

5- اثبات أن

$2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 0[17]$

لدينا : $2019 \equiv 13[17]$

ومنه $2019^{1954} \equiv 13^{1954}[17]$

أي من الشكل 13^{4k+2} لأن $1954 = 4 \times 488 + 2$

من السؤال السابق لدينا $13^{4k+2} \equiv 16[17]$

اذن: $13^{1954} \equiv 16[17]$

ومنه $2019^{1954} \equiv 16[17] \ldots\ldots(1)$

ولدينا أيضا : $169 \equiv 16[17]$

$169 \equiv -1[17]$

$169^{2n} \equiv (-1)^{2n}[17]$

$169^{2n} \equiv 1[17] \ldots\ldots(2)$

لأن $2n$ عدد زوجي

ولدينا أيضا مما سبق: $1441 \equiv 13[17]$

ومنه $1441^{2969} \equiv 13^{2969}[17]$

وحسب قيم بواقي 13^n على 17 نجد :

$13^{2969} = 13^{4\times742+1}$

من الشكل 13^{4k+1} ومنه الباقي هو 13 حسب الجدول السابق :

$1441^{2969} \equiv 13^{2969}[17]] \ldots\ldots(3)$

مما سبق وبالجمع بين (1)؛ و (2) و (3)

$2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} \equiv 16 + 1 + 13[17]$

ومنه $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} \equiv 13[17]$

$2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 0[17]$

6- تبيان أن

$n + 1954^{1962} + 16 \equiv 0[17]$

أي

$n + 1954^{1962} \equiv 1[17] \ldots\ldots(*)$

وحسابيا نجد :

$1954 \equiv 16[17]$

أي

$1954 \equiv -1[17]$

لأن 1962 عدد زوجي : $1954^{1962} \equiv 1[17] \ldots\ldots(**)$

بطرح بين (*) و (**) نجد

أي

$n \equiv 1 - 1[17]$

$n \equiv 0[17]$

ومنه قيم n هي الأعداد الطبيعية التي بواقي قسمتها على 17 هو 0 أي مضاعفات 17نكتب

$n = 17k + 0$

مع $k \in \mathbb{N}$

3. بكالوريا 2018 الموضوع الأول

1-ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5

2-عين العدد الطبيعي a بحيث يكون : $2018 = 4a + 2$

3-بين أن العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5

4-أ-تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n :

$(-3)^n \equiv 2^n[5]$ و $12^n \equiv 2^n[5]$

4-ب-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث:

$12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$

الحل

1-دراسة بواقي قسمة2^n على 5

$n = 0\,, 2^0 \equiv 1[5]$

$n = 1\,, 2^1 \equiv 2[5]$

$n = 2\,, 2^2 \equiv 4[5]$

$n = 3\,, 2^3 \equiv 8[5]$

$2^3 \equiv 3[5]$

$n = 4\,, 2^4 \equiv 16 \equiv 16[5]$

$2^4 \equiv 1[5]$

اذن القسمة دورية ودورها 4

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$2^n \equiv$	1	2	4	3	[5]

بواقي 2^n على 5 حسب قيم العدد الطبيعي nهي: 3,4,2,1

2-عين a بحيث $2018 = 4a + 2$

لدينا

$2018 = 4(504) + 2$

$2018 = 4a + 2$

ومنه

$a = 504$

3-البرهان أن $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5

معناه : $2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 0[5]$

لدينا : $2018 = 4(504) + 2$

أي : $2^{2018} = 2^{4(504)+2}$

لدينا $2018 = 4(504) + 2$ هي من الشكل : $4k + 2$

ومنه حسب بواقي 2^n على 5

$2^{2018} \equiv 4[5]$

ولدينا

$2017^8 \equiv 2^8[5]$

$2017^8 \equiv 256[5]$

$2017^8 \equiv 1[5]$

اذن

$2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 5 - 5[5]$

$2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 0[5]$

ومنه العدد $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5

التحقق من أجل كل عدد طبيعي n أن: $12^n \equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n[5]$

$$12 \equiv 2[5]$$
$$12^n \equiv 2^n[5]$$

لدينا $-5 \equiv 0[5]$ ومنه

$$-3-2 \equiv 0[5]$$
$$-3-2+2 \equiv 2[5]$$
$$(-3)^n \equiv 2^n[5]$$

ب-تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$

لدينا $12^n \equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n[5]$

أي: $2^n + 2^n - 4 \equiv 0[5]$

$$2^n + 2^n - 4 + 4 \equiv 0 + 4[5]$$
$$2^n + 2^n \equiv 4[5]$$
$$2.2^n \equiv 4[5]$$

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
2^n	1	2	4	3
$2 \times 2^n \equiv$	2	"4"	3	1

ومنه $n = 4k+1$ حيث k عدد طبيعي

4. بكالوريا 2018 الموضوع الثاني

a و b عددان طبيعيا غير معدومين حيث $a = 4b + 6$

1-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد a على 4

2-بين أن a و b متوافقان بترديد 3

3-نضع $b = 489$

أ-تحقق أن $a \equiv -1[13]$

ب-استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13

ج-عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلا للقسمة على 13

الحل

1-تعين باقي القسمة الاقليدية للعدد a على 4

لدينا: $a = 4b + 6$ يعني $a \equiv 6[4]$

$$a \equiv 2[4]$$

ومنه باقي قسمة a على 4 هو "2"

2-البرهان أن a و b متوافقان بترديد 3:

$$a - b \equiv 0[3]$$
$$a - b = 4b + 6 - b = 3b + 6$$
$$3b \equiv 0[3]$$
$$6 \equiv 0[3]$$
$$3b + 6 \equiv 0[3]$$

ومنه a و b متوافقان بترديد 3

3-أ-التحقق أن $a \equiv -1[13]$

$$b = 489$$
$$a = 4(489) + 6$$
$$a = 1962$$
$$a \equiv 12[13]$$
$$a \equiv 12 - 13[13]$$

ومنه $a \equiv -1[13]$

3-ب-استنتاج باقي القسمة الاقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13

$$a \equiv -1[13]$$
$$a^{2018} \equiv (-1)^{2018}[13]$$

بما أن 2018 عدد زوجي تصبح:

$$a^{2018} \equiv 1[13]$$

ولدينا

$$40 \equiv 1[13]$$
$$40^{2968} \equiv 1^{2968}[13]$$
$$40^{2968} \equiv 1[13]$$

ومنه

$$a^{2018} + 40^{2968} \equiv 1 + 1[13]$$
$$a^{2018} + 40^{2968} \equiv 2[13]$$

ومنه الباقي هو "2"

3-ج-تعين قيم n حتى يكون $a^{2n} + n + 3 \equiv 0[13]$

لدينا $a \equiv -1[13]$

$$a^{2n} \equiv (-1)^{2n}[13]$$

$2n$ عدد زوجي ومنه: $(-1)^{2n} = 1$

$$a^{2n} \equiv 1[13]$$
$$1 + n + 3 \equiv 0[13]$$
$$n \equiv -4[13]$$
$$n \equiv -4 + 13[13]$$
$$n \equiv 9[13]$$

ومنه قيم n هي $n = 13k + 9$ مع $K \in \mathbb{N}$

5. بكالوريا 2017 الاستثنائية الموضوع الأول

1-أ-عين باقي القسمة الاقليدية لكل من الأعداد 4 ، 4^2 و 4^3 على 9

1-ب-بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{3n} \equiv 1[9]$

1-ج-استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{3n+1} \equiv 4[9]$

2-تحقق أن: $2020^{1438} \equiv 4[9]$

3-بين أن العدد $(2020^{1438} - 2017^2 + 1995)$ يقبل القسمة على 9

الحل

1-أ- تعيين باقي القسمة الاقليدية لكل من الاعداد $4, 4^2, 4^3$ على 9

$$4 \equiv 4[9]$$
$$4^2 \equiv 7[9]$$
$$4^3 \equiv 1[9]$$

1-ب- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n $4^{3n} \equiv 1[9]$

$$4^3 \equiv 1[9]$$
$$4^{3n} \equiv 1^n[9]$$

وعليه $4^{3n} \equiv 1[9]$

1-ج- استنتاج أن $4^{3n+1} \equiv 4[9]$

لدينا $4^{3n} \equiv 1[9]$

بالضرب في 4 نجد $4^{3n}.4^1 \equiv 4[9]$

إذن $4^{3n+1} \equiv 4[9]$

2-التحقق أن $2020^{1438} \equiv 4[9]$

لدينا $2020 \equiv 4[9]$

ومنه $2020^{1438} \equiv 4^{1438}[9]$

ولدينا $1438 = 3(479) + 1$

ومنه

$$2020^{1438} \equiv 4^{3(479)+1}[9]$$

ومن حسب 1-جـ

$$2020^{1438} \equiv 4[9]$$

3-تبيان أن العدد $(2020^{1438} - 2017^2 + 1995)$ يقبل القسمة على 9

أي نثبت أن $2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 0[9]$

حسب السؤال السابق لدينا $2020^{1438} \equiv 4[9]$

و $2017 \equiv 1[9]$

وعليه $2017^2 \equiv 1[9]$

و $1995 \equiv 6[9]$

ومنه $2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 4 - 1 + 6[9]$

$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 9[9]$$

$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 0[9]$$

6. بكالوريا 2017 الاستثنائية الموضوع الثاني

a و b عددان صحيحان حيث: $a \equiv 14[13]$ و $b \equiv -1[13]$

1-أ-بين أن باقي القسمة الاقليدية للعددين a و b على 13 هو 1 و 12 على الترتيب

1-ب- استنتج باقي القسمة الاقليدية لكل من $a + b$ ، $a - b$ و $2a + b^2$ على 13

2-بين أن العدد $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13

3-عين الأعداد الطبيعي n بحيث:

$$b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13]$$

الحل

$a \equiv 14[13]$ و $b \equiv -1[13]$

1-أ- تبيان أن $a \equiv 1[13]$ و $b \equiv 12[13]$

لدينا $a \equiv 14[13]$

$$a \equiv 14 - 13[13]$$

$$a \equiv 1[13]$$

ومنه باقي قسمة a على 13 هو 1

لدينا $b \equiv -1[13]$

$$b \equiv -1 + 13[13]$$

$$b \equiv 12[13]$$

ومنه باقي قسمة b على 13 هو 12

1-ب-استنتاج باقي قسمة $a + b$ و $a - b$ و $2a + b^2$ على 13

$$a \equiv 1[13]$$

$$b \equiv 12[13]$$

$$a + b \equiv 1 + 12[13]$$

$$a + b \equiv 0[13]$$

ومنه باقي قسمة $a + b$ على 13 هو 0

$$a - b \equiv 14 - 12[13]$$

$$a - b \equiv 2[13]$$

ومنه باقي قسمة $a - b$ على 13 هو 2

$a \equiv 1[13]$ ، $b \equiv -1[13]$

$2a \equiv 2[13]$ و $b^2 \equiv 1[13]$

$$2a + b^2 \equiv 2 + 1[13]$$

$$\equiv 3[3]$$

ومنه باقي قسمة $2a + b^2$ على 13 هو 3

2-تبيان أن $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13

$$a \equiv 1[13]$$

$$a^{1438} \equiv 1^{1438}[13]$$

$$a^{1438} \equiv 1[13]$$

و

$$b \equiv -1[13]$$

$$b^{2017} \equiv (-1)^{2017}[13]$$

لأن 2017 فردي

$$b^{2017} \equiv -1[13]$$

ومنه

$$a^{1438} + b^{2017} \equiv 1 - 1[13]$$

$$\equiv 0[13]$$

وهو المطلوب

3-تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث

$b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13]$

$$1438 \equiv 8[13]$$

ومنه $b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13]$

إذن $-1 + n + 8 \equiv 0[13]$

$$n \equiv -7[13]$$

$$n \equiv -7 + 13[13]$$

$$n \equiv 6[13]$$

ومنه $n = 13k + 6$ حيث k عدد طبيعي

7. بكالوريا 2017 الموضوع الأول

نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث $a = 2016$، $b = 1437$ و $c = 1954$

1-عين باقي القسمة الاقليدية لكل من الاعداد a ، b و c على 5

2-استنتج باقي القسمة الاقليدية لكل من الأعداد :

$a + b + c$ ، $a \times b \times c$ و b^4 على 5

3-أ-تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $b^{4n} \equiv 1[5]$

3-ب-استنتج العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5

4-أ-تحقق أن: $c \equiv -1[5]$

4-ب-بين أن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0[5]$

الحل

لدينا : $a = 2016$ ، $b = 1437$ ، $c = 1954$

1-تعين باقي القسمة الاقليدية لـ c, b, a على 5

$$a \equiv 1[5]$$

لأن : $2016 = 5(403) + 1$

$$b = 5(287) + 2$$

ومنه باقي قسمة b على 5 هو 2

$$1954 \equiv 5(390) + 4$$

ومنه باقي قسمة c على 5هو 4

2-استنتاج باقي قسمة الاقليدية لكل من :

$$a + b + c \equiv 1 + 2 + 4[5]$$

$a+b+c \equiv 7[5]$
$a+b+c \equiv 2[5]$

إذن باقي $a+b+c$ على 5 هو 2

$a \times b \times c \equiv 1 \times 2 \times 4[5]$
$a \times b \times c \equiv 8[5]$
$a \times b \times c \equiv 3[5]$

باقي $a \times b \times c$ هو 3

$b^4 \equiv 2^4[5]$
$b^4 \equiv 16[5]$
$b^4 \equiv 1[5]$

ومنه باقي b^4 على 5 هو 1

ب-التحقق أن $b^{4n} \equiv 1[5]$

لدينا: $b^4 \equiv 1[5]$
ومنه: $b^{4n} \equiv 1^n[5]$
$b^{4n} \equiv 1[5]$

جـ-استنتاج أن $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5 :

لدينا: $b^{4n} \equiv 1[5]$
أي: $b^{4n} - 1 \equiv 0[5]$
ولدينا: $2016 = 4(504)$
وبالتالي: $b^{4(504)} \equiv 1^{504}[5]$
ومنه:
$b^{2016} \equiv 1[5]$
$b^{2016} - 1 \equiv 1 - 1[5]$
$b^{2016} - 1 \equiv 0[5]$

ومنه $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على العدد 5

د-التحقق أن: $c \equiv -1[5]$

لدينا
$c \equiv 4[5]$
ومنه
$c \equiv 4 - 5[5]$
$c \equiv -1[5]$

هـ-البرهان أن $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0[5]$

لدينا
$c \equiv -1[5]$
$c^{1438} \equiv (-1)^{1438}[5]$
بما أن 1438 عدد زوجي فإن : $c^{1438} \equiv 1[5]$
$c^{2017} \equiv (-1)^{2017}[5]$
بما أن 2017 عدد فردي فإن $c^{2017} \equiv -1[5]$
ومنه $c^{2017} + c^{1438} \equiv 1 - 1[5]$
$c^{1438} + c^{2017} \equiv 0[5]$

8. بكالوريا 2017 الموضوع الثاني

a، b و c ثلاثة أعداد طبيعية حيث $a \equiv -5[7]$ ، $b = 1966$ و $c = 2017$

1-عين باقي القسمة الاقليدية لكل من الأعداد a ، b و c على 7

2-تحقق أن: $b \equiv -1[7]$

3-أثبت أن العدد : $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7

4-تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{3k} \equiv 1[7]$ ثم استنتج أن: $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

5-عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2^n + 3$ قابلا للقسمة على 7

الحل

1-تعين باقي القسمة الاقليدية لـ a ، b ، c على 7

بحيث $a \equiv -5[7]$ ، $b = 1966$ ، $c = 2017$

$a \equiv -5[7]$
$a \equiv -5 + 7[7]$
$a \equiv 2[7]$

ومنه باقي قسمة a على 7 هو 2

$b \equiv 6[7]$
لأن
$1966 = 280(7) + 6$
أي باقي قسمة b على 7 هو 6

$c \equiv 1[7]$
لأن
$2017 = 7(288) + 1$
ومنه باقي قسمة c على 7 هو 1

2-التحقق أن : $b \equiv -1[7]$

لدينا : $b \equiv 6[7]$
$b \equiv 6 - 7[7]$
$b \equiv -1[7]$

3-اثبات أن $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7

لدينا $b \equiv -1[7]$
ومنه: $b^{2017} \equiv (-1)^{2017}[7]$
2017 فردي ومنه $b^{2017} \equiv -1[7]$

$c^{1438} \equiv 1^{1438}[7]$
$c^{1438} \equiv 1[7]$

مما سبق نجد
$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -1 + 3(1) - 2[7]$
$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -1 + 3 - 2[7]$
$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv 0[7]$

ومنه العدد $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7

4-التحقق أن : $2^{3k} \equiv 1[7]$ من أجل $k \in \mathbb{N}$

$2^3 \equiv 8[7]$
$2^3 \equiv 1[7]$
$2^{3k} \equiv 1^k[7]$
ومنه
$2^{3k} \equiv 1[7]$

-استنتاج أن $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

لدينا
$2^1 \times 2^{3k} \equiv 1 \times 2[7]$
$2^{3k+1} \equiv 2[7]$
$2^1 \times 2^{3k+1} \equiv 2 \times 2[7]$
ومنه
$2^{3k+2} \equiv 4[7]$

5-تعين قيم n حتى يكون $2^n + 3$ قابلا للقسمة على 7

أي $2^n + 3 \equiv 0[7]$
لدينا : $2^{3k} \equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2} \equiv 4[7]$
ومنه:
$2^{3k+2} + 3 \equiv 4 + 3[7]$
$2^{3k+2} + 3 \equiv 7[7]$
$2^{3k+2} + 3 \equiv 0[7]$

قيم n حتى يكون العدد $2^n + 3$ يقبل القسمة على 7 هي :
$n = 3k + 2$
حيث $k \in \mathbb{N}$

9. بكالوريا 2016 الموضوع الأول

1-عين باقي القسمة الاقليدية لكل من الاعداد 2^0، 2^1، 2^2، 2^3 و 2^4 على العدد 5

2-أ- بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون : $2^{4n} \equiv 1[5]$

2-ب- استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^{2016} على العدد 5

3-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$

الحل

1-تعين باقي القسمة لكل من $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ على 5

$2^0 \equiv 1[5]$ الباقي هو 1

$2^1 \equiv 2[5]$ الباقي هو 2

$2^2 \equiv 4[5]$ الباقي هو 4

$2^3 \equiv 3[5]$ الباقي هو 3

$2^4 \equiv 1[5]$ الباقي هو 1

القسمة دورية دورها 4

2-أ-البرهان أن من اجل كل عدد طبيعي n يكون $2^{4n} \equiv 1[5]$

لدينا $2^4 \equiv 1[5]$

أي $2^{4n} \equiv 1^n[5]$

ومنه $2^{4n} \equiv 1[5]$

2-ب- استنتاج باقي القسمة الاقليدية لـ 2^{2016} على 5

لدينا $2016 = 4(504)$

ومنه $2^{2016} = 2^{4(504)}$

لدينا مما سبق $2^{4n} \equiv 1[5]$

ومنه $2^{4(504)} \equiv 1^{504}[7]$

أي $2^{2016} \equiv 1[5]$

ومنه باقي قسمة 2^{2016} على 5 هو « 1 »

3- تعين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$

لدينا : $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$

ومنه : $2^{2016} \equiv 1[5]$

$1 + 2 + n \equiv 0[5]$

$3 + n \equiv 0[5]$

$n + 3 - 3 \equiv -3 + 0[5]$

$n \equiv -3[5]$

$n \equiv -3 + 5[5]$

$n \equiv 2[5]$

ومنه $n = 5k + 2$ مع k عدد طبيعي

10. بكالوريا 2016 الموضوع الثاني

1-أ-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^3 على 9

1-ب-استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي k : $4^{3k} \equiv 1[9]$

1-ج-ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9

1-د-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 2015^{2016} على 9

2-أ-بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $8^{2n} \equiv 1[9]$

2-ب-عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $8^{2n} + 4^n + 1$ مضاعفا للعدد 9

الحل

1-أ-تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^3 على 9

$4^3 = 64$

$64 = 9 \times 7 + 1$

ومنه $64 \equiv 1[9]$

أي $4^3 \equiv 1[9]$

باقي 4^3 على 9 هو 1

1-ب-استنتاج أن $4^{3k} \equiv 1[9]$ حيث $k \in \mathbb{N}$

لدينا : $4^3 \equiv 1[9]$

ومنه $4^{3k} \equiv 1^k[9]$

وبالتالي $4^{3k} \equiv 1[9]$

1-ج-دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9

$n = 0$ $4^0 \equiv 1[9]$

$n = 1$ $4^1 \equiv 4[9]$

$n = 2$ $4^2 \equiv 7[9]$

$n = 3$ $4^3 \equiv 1[9]$

القسمة دورية ودورها 3 أي $4^{3k} \equiv 1[9]$

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$4^n \equiv$	1	4	7	[9]

بواقي 4^n على 9 هي 7,4,1 مهما كان $n \in \mathbb{N}$

1-د-تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد 2015^{2016} على 9

$2015 \equiv 8[9]$

$8 \equiv 8[9]$

$8 \equiv -1[9]$

$8^{2016} \equiv (-1)^{2016}[9]$

$8^{2016} \equiv 1[9]$

لان 2016 عدد زوجي

ومنه $2015^{2016} \equiv 1[9]$

باقي قسمة 2015^{2016} على 9 هو 1

2-أ-البرهان أن $8^{2n} \equiv 1[9]$ من أجل $n \in \mathbb{N}$

لدينا $8^{2n} \equiv (-1)^{2n}[9]$

$2n$ عدد زوجي

ومنه $8^{2n} \equiv 1[9]$

2-ب-تعين قيم n بحيث يكون $8^{2n} + 4^n + 1$ مضاعفا للعدد 9

لدينا $8^{2n} \equiv 1[9]$

أي $1 + 4^n + 1 \equiv 0[9]$

$4^n + 2 \equiv 0[9]$

$4^n \equiv -2[9]$

$4^n \equiv 7[9]$

ومن الجدول (س1-ج) فإن $n = 3k + 2 \in \mathbb{N}$ حيث $k \in \mathbb{N}$

11. بكالوريا 2015 الموضوع الأول

عين الاقتراح الصحيح الوحيد ، مع التعليل، من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الأربعة الآتية :

1-إذا كان a عددا صحيحا حيث : $a \equiv -1[5]$ فإن :

أ) $a \equiv 2[5]$ ب) $a \equiv 6[5]$ ج) $a \equiv 99[5]$

2-باقي القسمة الاقليدية للعدد 99- على 7 هو :

أ) 1-   ب) 6   ج) 1

2-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $10^n - 1$ يقبل القسمة على:
أ) 3   ب) 5   ج) 2

3-مجموع كل ثلاث أعداد طبيعية متعاقبة هو دوما :
أ) عدد زوجي   ب) مضاعف للعدد 3   ج) مضاعف للعدد 4

الحل

1-تعين الاقتراح الصحيح في كل حالة

$$a \equiv -1[5]$$
$$a \equiv -1 + 5[5]$$
$$a \equiv 4[5]$$
$$a \equiv 99[5]$$
$$99 \equiv 4[5]$$

بما أن $a \equiv 4[5]$
ومنه الجواب الصحيح هو "ج"

2-تعين باقي 99 على 7 :

$$-99 \equiv -1[7]$$
$$-99 \equiv 6[7]$$

الجواب الصحيح هو "ب"

3-يقبل العدد $10^n - 1$ القسمة على:

$$10^n \equiv 1^n[3]$$

ومنه

$$10^n \equiv 1^n[3]$$
$$10^n \equiv 1[3]$$
$$10^n - 1 \equiv 1 - 1[3]$$
$$10^n - 1 \equiv 0[3]$$

ومنه الجواب الصحيح هو "أ"

4-مجموع كل ثلاث أعداد طبيعية متعاقبة دوما :

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3$$
$$= 3(n+1)$$

ومنه

$$n + (n+1) + (n+2) \equiv 0[3]$$

ومنه الجواب الصحيح هو "ب"

12. بكالوريا 2015 الموضوع الثاني

a و b عددان صحيحا يحققان: $a \equiv 13[7]$ و $b \equiv -6[7]$

1-عين باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من العددين a و b

2-بين أن العددين $a^3 + 1$ و $b^3 - 1$ يقبلان القسمة على 7

3-أ-تحقق أن: $a \equiv 2015[7]$ و $b \equiv 1436\ [7]$

ب-عين باقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد $2015^3 + 1436^3$

ج-استنتج أن: $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0[4]$

الحل

$a \equiv 13[7]$ ، $b \equiv -6[7]$

1-تعيين باقي القسمة الاقليدية لـ a و b على 7 :

$$a \equiv 13[7]$$
$$a \equiv 6[7] \text{ لأن } 13 \equiv 6[7]$$

باقي a على 7 هو 6

$$b \equiv -6[7]$$
$$b \equiv 1[7]$$

الباقي لـ b على 7 هو 1

2-البرهان أن العددين $a^3 + 1$ و $b^3 - 1$ يقبلان القسمة على 7

لدينا

$$a \equiv 6[7]$$
$$a \equiv -1[7]$$

ومنه $a^3 \equiv -1[7]$ لأن $(-1)^3 = -1$

ومنه $a^3 + 1 \equiv 0[7]$

ومنه $a^3 + 1$ يقبل القسمة على 7

ولدينا

$$b \equiv 1[7]$$
$$b^3 \equiv 1^3[7]$$
$$b^3 - 1 \equiv 1 - 1[7]$$
$$b^3 - 1 \equiv 0[7]$$

ومنه $b^3 - 1$ يقبل القسمة على 7

3-أ- التحقق أن $a \equiv 2015[7]$ و $b \equiv 1436[7]$

معناه نجد للعددين a ، 2015 نفس الباقي بترديد 7

$$2015 \equiv 6[7]$$

الباقي للعدد 2015 على 7 هو 6 أي العددان a و 2015 متوافقان بترديد 7

$$b \equiv 1436[7]$$
$$1436 \equiv 1[7]$$

العددان b و 1436 متوافقان بالترديد 7

3-ب- تعيين باقي قسمة $2015^3 + 1436^3$ على 7

لدينا

$$2015 \equiv 6[7]$$
$$2015^3 \equiv 6^3[7]$$
$$2015^3 \equiv 216[7]$$
$$2015^3 \equiv 6[7]$$

ولدينا

$$1436^3 \equiv 1^3[7]$$
$$1436^3 \equiv 1[7]$$

وبالتالي

$$2015^3 + 1436^3 \equiv 6 + 1[7]$$
$$2015^3 + 1436^3 \equiv 0[7]$$

ومنه باقي هذا العدد على 7 هو "0"

3-ج- استنتاج أن :
$2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0[7]$

لدينا $2015^3 + 1436^3 \equiv 0[7]$

$$1962^3 \equiv 2^3[7]$$
$$1962^3 \equiv 8[7]$$
$$1962^3 \equiv 1[7]$$

ومنه

$$2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0 - (1) + 1[7]$$
$$2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0[7]$$

موافقة صحيحة

13. بكالوريا 2014 الموضوع الأول

1-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 28 على العدد 9

2-بين انه من اجل كل عدد طبيعي k : $10^k \equiv 1[9]$

3-استنتج أن : $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$

4-أ-تحقق أن: $2^3 \equiv -1[9]$

4-ب-عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $2^{6n} + n - 1 \equiv 0\ [9]$

الحل

1-تعين باقي القسمة الاقليدية للعدد 28 على 9 :

$$28 = 3 \times 9 + 1$$
$$28 \equiv 1[9]$$

ومنه الباقي هو العدد "1"

2-البرهان أن $10^k \equiv 1[9]$

$$10 = 9 \times 1 + 1$$
$$10 \equiv 1[9]$$
$$10^k \equiv 1^k[9]$$

ومنه $10^k \equiv 1[9]$

3-استنتاج أن
$4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$

لدينا : $10^k \equiv 1[9]$

و

$$4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28$$
$$\equiv 4 \times 1 + (3 \times 1) + (2 \times 1) + 1[9]$$
$$\equiv 4 + 3 + 2 + 1[9]$$
$$4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 10[9]$$
$$4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$$

4-أ-التحقق أن $2^3 \equiv -1[9]$

$$2^3 = 2.2.2 = 8$$
$$8 \equiv 8[9]$$
$$8 \equiv 8 - 9[9]$$

أي $8 \equiv -1[9]$

ومنه $2^3 \equiv -1[9]$

4-ب- تعين قيم n حيث : $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$

لدينا

$$2^3 \equiv -1[9]$$
$$2^3 \equiv -1[9]$$
$$(2^3)^{2n} \equiv (-1)^{2n}[9]$$
$$2^{6n} \equiv 1[9]$$

لأن $2n$ عدد زوجي

$$1 + n - 1 \equiv 0[9]$$

أي $n \equiv 0[9]$

$n = 9k + 0$ مع $k \in N$

14. بكالوريا 2014 الموضوع الثاني

عين الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الخمسة مع التبرير:

		الاقتراح(أ)	الاقتراح (ب)	الاقتراح(ج)
1	عدد قواسم العدد 1435 هو:	8	5	2
2	إذا كان $a \equiv -1[8]$ فإن باقي قسمة a على 8 هو:	-1	7	6
3	العددان 1435 و2014 متوافقان بترديد:	2	4	3
4	إذا كان $x \equiv 2[5]$ و $y \equiv 2[5]$ فإن:	$x^9 + y^9 \equiv 3[5]$	$x^9 + y^9 \equiv 2[5]$	$x^9 + y^9 \equiv 4[5]$
5	لدينا $27 \equiv 21[6]$ إذن:	$9 \equiv 7[6]$	$9 \equiv 7[2]$	$9 \equiv 7[3]$

الحل

1-تعيين الاقتراح الصحيح مع التبرير

1-عدد قواسم العدد 1435 هو :

1435	5
287	7
41	41
1	

$$1436 = 5^1 \times 7^1 \times 41^1$$

عدد القواسم : $8 = (1+1)(1+1)(1+1)$

ومنه الاقتراح "أ" هو الصحيح

2-اذا كان $a \equiv -1[8]$ فإن باقي قسمة a على 8 هو :

$$a \equiv -1[8]$$
$$a \equiv -1 + 8[8]$$
$$a \equiv 7[8]$$

ومنه الاقتراح الصحيح هو "ب"

3-العددان 1435و 2014 متوافقان هما العددان اللذان لهما نفس الباقي بالنسبة الى نفس الترديد

لدينا :

$$1435 \equiv 1[3]$$
$$2014 \equiv 1[3]$$

ومنه الاقتراح الصحيح هو "جـ"

4-اذا كان $x \equiv 2[5]$ و $y \equiv 2[5]$ فإن :

$$x^9 \equiv 2^9[5]$$
$$x^9 \equiv 512[5]$$
$$y^9 \equiv 2^9[5]$$
$$y^9 \equiv 512[5]$$
$$x^9 + y^9 \equiv (512 + 512)[5]$$
$$x^9 + y^9 \equiv 1024[5]$$
$$\equiv 4[5]$$

الاقتراح الصحيح هو "جـ"

-لدينا $27 \equiv 21[6]$ اذن :

ملاحظة : من اجل كل عددان صحيحان x و y ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم λ اذا كان $x \equiv y[n]$ فإن $\lambda x \equiv \lambda y[\lambda n]$

$$9 \equiv 7[2]$$

بالضرب في 3 نجد : $27 \equiv 21[6]$

ومنه الاقتراح الصحيح هو "ب"

15. بكالوريا 2013 الموضوع الأول

1-هل العددان 2013 و 718 متوافقان بترديد 7 ؟

2-أ-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^6 على 7

2-ب-استنتج أنه ، من اجل كل عدد طبيعي n :

$$4^{6n} - 1 \equiv 0[7]$$

3-أ-عين باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 2013 و718 على 7

3-ب-بين أنه ، من اجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2013 + 3 \times 718^{6n}$ يقبل القسمة على 7

4-أ-تحقق أن : $1434 \equiv -1[7]$

4-ب-عين الاعداد الطبيعية n ، الأصغر من 25 ، بحيث

$$1434^{2n} + n \equiv 0[7]$$

الحل

1-معرفة ان كان العددان 2013 و 718 متوافقان بترديد 7 :

$$2013 - 718 = 1295$$
$$1295 \equiv 0[7]$$

ومنه العددان متوافقان بترديد 7

2-أ-باقي قسمة 4^6 على 7:

$$4^6 \equiv 1[7]$$

باقي قسمة 4^6 على 7 هو 1

2-ب-استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $4^{6n} - 1 \equiv 0[7]$

لدينا

$$4^6 \equiv 1[7]$$
$$4^{6n} \equiv 1^n[7]$$

بالتعويض : $1 - 1 \equiv 0[7]$ ومنه :

$$4^{6n} - 1 \equiv 0[7]$$

3-أ-تعيين باقي قسمة 2013 و 718 على 7

$$2013 \equiv 4[7]$$
$$718 \equiv 4[7]$$

3-ب-البرهان أن : $3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv 0[7]$

لدينا

$$718 \equiv 4[7]$$
$$718^6 \equiv 4^6[7]$$
$$718^{6n} \equiv 1^n[7]$$
$$718^{6n} \equiv 1[7]$$

بالتعويض : $3 \times 1 + 4 = 7$

أي $7 \equiv 0[7]$

ومنه العدد يقبل القسمة على 7

4-أ-التحقق أن: $1434 \equiv -1[7]$

$$1434 \equiv 6[7]$$

ومنه

$$1434 \equiv 6 - 7[7]$$
$$1434 \equiv -1[7]$$

4-ب-تعيين n حيث $1434^{2n} + n \equiv 0[7]$

$2n$ زوجي أي

$$1434^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7]$$
$$1434^{2n} \equiv 1[7]$$

بالتعويض :

$$n + 1 \equiv 0[7]$$

ومنه :

$$n \equiv -1[7]$$
$$n \equiv -1 + 7[7]$$
$$n \equiv 6[7]$$
$$n = 7k + 6$$

حيث $k \in \mathbb{N}$

بالتعويض

$k = 0$ ، $n = 6$

$k = 1$ ، $n = 13$

$k = 2$ ، $n = 20$

$k = 3$ ، $n = 27$

$$n = \{6, 13, 20\}$$

16. بكالوريا 2013 الموضوع الثاني

a و b عددان صحيحان حيث : $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$

1-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $3a + b$ على 7

2-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7

3-أ-تحقق أن: $b \equiv -1[7]$

3-ب-استنتج باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين b^{2013} و b^{1434} على 7

4-عين الاعداد الطبيعة n بحيث : $(a + b)^n + n \equiv 0[7]$

الحل

$a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$

1-تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(3a + b)$ على 7

لدينا

$$3a + b \equiv 3 \times 2 + 6[7]$$
$$3a + b \equiv 6 + 6[7]$$
$$3a + b \equiv 12[7]$$
$$3a + b \equiv 5[7]$$

2-تعين باقي $a^2 + 3b^2$ على 7

$$a^2 + 3b^2 \equiv 2^2 + 3(6)^2[7]$$
$$\equiv 4 + 108[7]$$
$$\equiv 112[7]$$
$$a^2 + 3b^2 \equiv 0[7]$$

الباقي هو 0

3-أ-التحقق أن $b \equiv -1[7]$

$$b \equiv 6[7]$$
$$b \equiv 6 - 7[7]$$
$$b \equiv -1[7]$$

3-ب-استنتاج باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين b^{2013} و b^{1434} على 7

لدينا

$$b \equiv -1[7]$$

ومنه

$$b^{2013} \equiv (-1)^{2013}[7]$$
$$b^{2013} \equiv -1[7]$$

لأن 2013 عدد فردي

ومنه الباقي هو 6

لدينا

$$b \equiv -1[7]$$
$$b^{1434} \equiv (-1)^{1434}[7]$$

1434 عدد زوجي أي : $b^{1434} \equiv 1[7]$

ومنه الباقي 1

4-تعين الاعداد الطبيعية n حيث : $(a + b)^n + n \equiv 0[7]$

$$(2 + 6)^n + n \equiv 0[7]$$
$$8^n + n \equiv 0[7]$$
$$8^n \equiv 1[7]$$
$$8^n \equiv 1^n[7]$$
$$1 + n \equiv 0[7]$$
$$n \equiv -1[7]$$
$$n \equiv -1 + 7[7]$$
$$n \equiv 6[7]$$
$$n = 7k + 6$$

$(k \in \mathbb{N})$

17. بكالوريا 2012 الموضوع الأول

اذكر في كل حالة من الحالات الآتية إن كانت العبارة المقترحة صحيحة أو خاطئة مع التعليل

1- n و n' عددان طبيعيان حيث : $n = 3n' + 5$ باقي قسمة n على 3 هو 5

2-باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2012} على 7 هو 4 (لاحظ أن : $2012 = 3 \times 670 + 2$)

3- n عدد صحيح حيث: $n \equiv 2[11]$ باقي القسمة الاقليدية للعدد $2n^2 - 9$ على 11 هو 10

4- g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

(C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

4-أ- (C_g) يشمل النقطة $A\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right)$

4-ب-المنحنى (C_g) يقبل مماسا معامل توجيه توجيهه يساوي 2

الحل

1- n و n' عددان طبيعيان حيث $n = 3n' + 5$

أي $n \equiv 5[3]$

ومنه $n \equiv 2[3]$

ومنه الإجابة خاطئة لأن باقي قسمة n على 3 هو 2

2-صحيحة لأن :

لدينا $2^3 \equiv 8[7]$

$\equiv 1[7]$

ومنه $2^{3(670)} \equiv 1^{670}[7]$

وعليه $2^{3(670)} \times 2^2 \equiv 1 \times 2^2[7]$

اذن $2^{2012} \equiv 4[7]$

3- صحيحة لأن :

لدينا $n \equiv 2[11]$

ومنه $n^2 \equiv 2^2[11]$

$2n^2 \equiv 2 \times 4[11]$

وعليه $2n^2 - 9 \equiv 8 - 9[11]$

$2n^2 - 9 \equiv -1[11]$

$2n^2 - 9 \equiv 10[11]$

4- g الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

4-أ-صحيحة لأن :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

4-ب-صحيحة لأن :

$$g'(x) = \frac{(2x+2) - (2x+1)}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

حتى تقبل مماس يجب أن يوجد $x_0 \in]-1;+\infty[$

بحيث $g'(x_0) = 2$

أي $\frac{1}{(x_0+1)^2} = 2$

ومنه $1 = 2(x_0 + 1)^2$

$2x_0^2 + 4x_0 + 1 = 0$

حل معادلة : $\Delta = 16 - 4(2)(1) = 8$

مرفوض : $x_0 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{2(2)} < -1$

أو $x_0 = \frac{-4+2\sqrt{2}}{2(2)} = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$

ومنه (C_g) يقبل مماس معامل توجيهه 2 عند $x_0 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$

18. بكالوريا 2012 الموضوع الثاني

a و b عددان طبيعيان بحيث :

$a + b \equiv 7[11]$ و $a - b \equiv 5[11]$

1-أ-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11

1-ب-بين أن: $2a \equiv 1[11]$ و $2b \equiv 2[11]$ ثم استنتج أن: $a \equiv 6[11]$ و $b \equiv 1[11]$

2-أ-أثبت أن : $a^5 \equiv -1[11]$

2-ب-استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي K : $a^{10k} \equiv 1[11]$

3-أ-تحقق أن: $2012 = 10 \times 201 + 2$

3-ب-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد a^{2012} على العدد 11

الحل

a و b عددان طبيعيان حيث $a + b \equiv 7[11]$

و $a - b \equiv 5[11]$

1-أ-تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11

لدينا : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

ولدينا $a + b \equiv 7[11]$

$a - b \equiv 5[11]$

$(a+b)(a-b) \equiv 7 \times 5[11]$

$\equiv 35[11]$

$a^2 - b^2 \equiv 2[11]$

ومنه باقي القسمة الاقليدية للعدد $a^2 - b^2$ هو "2"

1-ب-البرهان أن $2a \equiv 1[11]$ و $2b \equiv 2[11]$ ثم استنتاج أن $a \equiv 6[11]$ و $b \equiv 1[11]$

ولدينا $\begin{cases} a + b \equiv 7[11] \\ a - b \equiv 5[7] \end{cases}$ بالجمع نجد

ومنه $2a \equiv 12[11]$

$2a \equiv 1[11]$

$\begin{cases} a + b \equiv 7[11] & (1) \\ -a + b \equiv -5[11] & (2) \end{cases}$ بالجمع (1) و (2) نجد

ومنه : $a + b - a + b \equiv 7 - 5[11]$

$2b \equiv 2[11]$

الاستنتاج أن $a \equiv 6[11]$ و $b \equiv 1[11]$

لدينا $\begin{cases} a + b \equiv 7[11] \\ a - b \equiv 5[11] \end{cases}$ بالجمع نجد : $2a \equiv 12[11]$

بالقسمة على 2 نجد

$a \equiv 6[11]$

لأن 11 و 2 أوليان فيما بينهما

$b \equiv 1[11]$

لدينا : $2b \equiv 2[11]$

بالقسمة على 2 نجد : $b \equiv 1[11]$

2-أ-$a^5 \equiv -1[11]$

لدينا
$$a \equiv 6[11]$$
$$a^5 \equiv 6^5[11]$$
$$a^5 \equiv 54[11]$$
$$a^5 \equiv 54-55[11]$$
$$a^5 \equiv -1[11]$$

2-ب-استنتاج أن $a^{10k} \equiv 1[11]$ من اجل $k \in \mathbb{N}$

لدينا $a^5 \equiv -1[11]$

$(a^5)^{2k} \equiv (-1)^{2k}[11]$

$a^{10k} \equiv 1[11]$ (لأن $2K$ عدد زوجي)

3-أ-التحقق أن

$$2012 = 10 \times 201 + 2$$
$$= 2010 + 2 = 2012$$

3-ب-تعين باقي القسمة الاقليدية للعدد a^{2012} على 11

نعلم أن $2012 = 10 \times 201 + 2$

$$a^{10(201)} \equiv 1[11]$$

ولدينا
$$a \equiv 6[11]$$
$$a^2 \equiv 3[11]$$
$$a^{10(201)}.a^2 \equiv 1 \times 3[11]$$

ومنه
$$a^{10(201)+2} \equiv 3[11]$$

أي
$$a^{2012} \equiv 3[11]$$

ومنه باقي قسمة a^{2012} على 11 هو 3

19. بكالوريا 2011 الموضوع الأول

نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a = 619$ و $b = 2124$

1-بين أن العددين a و b متوافقان بترديد 5

2-أ-بين أن : $2124 \equiv -1[5]$

2-ب-استنتج باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 2124^{720} و 619^{721} على 5

2-ج-بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$2124^{2n} \equiv 1[5]$$

2-د-عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون :

$$2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$$

الحل

1-البرهان أن a و b متوافقان بترديد 5 :

$a = 619$ و $b = 2124$

$$a \equiv 4[5]$$

لأن

619	5
11	123
19	
4	

$$b \equiv 4[5]$$

لأن

2124	5
20	424
24	
20	
4	

ومنه a و b متوافقان بترديد 5

2-أ-البرهان أن $2124 \equiv -1[5]$

لدينا :
$$2124 \equiv 4[5]$$
$$b \equiv 4[5]$$
$$b \equiv 4-5[5]$$

ومنه
$$b \equiv -1[5]$$

2-ب-استنتاج باقي القسمة الاقليدية لـ 2124^{720} و 619^{721} على 5

لدينا
$$2124 \equiv -1[5]$$
$$2124^{720} \equiv (-1)^{720}[5]$$

720 عدد زوجي اذن : $2124^{720} \equiv 1[5]$

ومنه الباقي هو 1

لدينا
$$619 \equiv 4[5]$$

و $2124 \equiv 4[5]$ و $2124 \equiv -1[5]$

ومنه
$$619 \equiv -1[5]$$
$$619^{721} \equiv (-1)^{721}[5]$$

بما أن 721 عدد فردي فإن : $619^{721} \equiv -1[5]$
$$619^{721} \equiv -1+5[5]$$
$$619^{721} \equiv 4[5]$$

ومنه الباقي 4

2-جـ البرهان أن $2124^{2n} \equiv 1[5]$

لدينا :
$$2124 \equiv -1[5]$$
$$2124^{2n} \equiv (-1)^{2n}[5]$$

$2n$ عدد زوجي اذن : $2124^{2n} \equiv 1[5]$

2-د-تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون
$2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$

لدينا : $4n$ عدد زوجي و $4n+1$ عدد فردي
$$2124^{4n} \equiv (-1)^{4n}[5]$$
$$2124^{4n} \equiv 1[5]$$
$$619^{4n+1} \equiv (-1)^{4n+1}[5]$$
$$619^{4n+1} \equiv -1[5]$$

اذن : بالتعويض نجد : $1 - 1 + n \equiv 0[5]$
$$n \equiv 0[5]$$

ومنه
$$n = 5k$$

حيث k عدد طبيعي

20. بكالوريا 2011 الموضوع الثاني

a ، b ، c اعداد صحيحة بحيث باقي القسمة الاقليدية للعدد a على 7 هو 3 ، باقي القسمة للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الاقليدية للعدد c على 7 هو6

1-عين باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من العددين: $a \times b$ ، $a^2 - b^2$

2-أ-اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $c^{2n} \equiv 1[7]$

2-ب-تحقق أن $48 \equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين: 48^{2010} و 48^{2011} على 7

الحل

لدينا : $a\equiv 3[7]$ ، $b\equiv 4[7]$ ، $c\equiv 6[7]$

1-باقي القسمة الاقليدية :

12	7
5	1

$$a\times b\equiv 3\times 4[7]$$
$$\equiv 12[7]$$
$$a\times b\equiv 5[7]$$

اذن الباقي هو 5

$$a^2-b^2\equiv(3)^2-(4)^2[7]$$
$$a^2-b^2\equiv 9-16[7]$$
$$a^2-b^2\equiv -7[7]$$
$$a^2-b^2\equiv -7+7[7]$$
$$a^2-b^2\equiv 0[7]$$

اذن الباقي هو "0"

2-أ-البرهان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أن $c^{2n}\equiv 1[7]$

لدينا :
$$c\equiv 6[7]$$
$c\equiv 6-7[7]$ أي $c\equiv -1[7]$
$$c^{2n}\equiv(-1)^{2n}[7]$$
$2n$ عدد زوجي أي :
$$c^{2n}\equiv 1[7]$$

2-ب-التحقق أن $48\equiv 6[7]$:

$$48=6\times 7+6$$

48	7
42	6
6	

استنتاج باقي : 48^{2010} على 7

لدينا
$$48\equiv 6[7]$$
$$48^{2010}\equiv 6^{2010}[7]$$
$$6\equiv 6[7]$$
أي
$$6\equiv 6-7[7]$$
$$6\equiv -1[7]$$
تصبح
$$48^{2010}\equiv(-1)^{2010}[7]$$
$$48^{2010}\equiv 1[7]$$
لأن 2010 عدد زوجي

استنتاج باقي 48^{2011} على 7 :

لدينا
$$48\equiv 6[7]$$
$$48\equiv 6-7[7]$$
$$48\equiv -1[7]$$
$$48^{2011}\equiv(-1)^{2011}[7]$$
2011 عدد فردي :
$$48^{2011}\equiv -1[7]$$
$$48^{2011}\equiv -1+7[7]$$
$$48^{2011}\equiv 6[7]$$

الباقي هو 6

21. بكالوريا 2010 الموضوع الأول

a و b عددان طبيعيان حيث : $a=2010$ و $b=1431$

1-أ-عين باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين a و b على 7

1-ب-استنتج مما سبق، باقي القسمة الاقليدية للعدد $(a+2b)$ على 7

1-جـ-تحقق أن $a^3\equiv 1[7]$ و $b^3\equiv 6[7]$ و استنتج أن $a^3+b^3\equiv 0[7]$

2-أوجد الاعداد الطبيعية n التي تحقق :
$$n+2010^3\equiv 1431[7]$$
ثم استنتج قيم n الأصغر من أو تساوي 16

الحل

لدينا $a=2010$ ، $b=1431$

1-أ-تعين باقي القسمة الاقليدية لكل من a و b على 7

1431	7
031	204
3	

$$b\equiv 3[7]$$
الباقي هو 3
$$a\equiv 1[7]$$
الباقي هو 1

1-ب-استنتاج باقي $(a+2b)$ على 7

$$a+2b\equiv 1+2(3)[7]$$
$$\equiv 7[7]$$
$$a+2b\equiv 0[7]$$
الباقي هو 0

1-جـ-التحقق أن : $a^3\equiv 1[7]$

لدينا
$$a\equiv 1[7]$$
$$a^3\equiv 1^3[7]$$
ومنه
$$a^3\equiv 1[7]$$

التحقق أن $b^3\equiv 6[7]$

27	7
12	3
6	

لدينا
$$b\equiv 3[7]$$
$$b^3\equiv 3^3[7]$$
$$3\times 3\times 3=27$$
$$27\equiv 6[7]$$
ومنه
$$b^3\equiv 6[7]$$

استنتاج أن $a^3+b^3\equiv 0[7]$

لدينا
$$a^3+b^3\equiv 1+6[7]$$
$$a^3+b^3\equiv 7[7]$$
$$a^3+b^3\equiv 0[7]$$

2-إيجاد الاعداد الطبيعية n التي تحقق $n+2010^3\equiv 1431[7]$

من السؤال السابق
$$n+a^3\equiv b[7]$$
ومنه
$$n+1\equiv 3[7]$$
$$n\equiv 3-1[7]$$
$$n\equiv 2[7]$$
أي : $n=7k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$

استنتاج قيم n الأصغر أو تساوي 16

$k=0$ ، $n=7(0)+2=2$

$k=1$ ، $n=7(1)+2=9$

$k=2$ ، $n=7(2)+2=16$

$k=3$ ، $n=23$ مرفوض

ومنه قيم n هي $n=\{2,9,16\}$

22. بكالوريا 2010 الموضوع الثاني

في كل من الأسئلة الآتية ، اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاثة المقترحة ، مع التعليل

1-باقي القسمة الاقليدية للعدد (-203) على 5 هو:

أ) -3 ب) 2 جـ) 3

2-x عدد صحيح . اذا كان باقي القسمة الاقليدية للعدد x على 7 هو 5، فإن باقي القسمة الاقليدية للعدد $2x+5$ على 7 هو :

أ) 0 ب) 1 جـ) 2

3-g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x)=x^3+3x+4$ و C_g تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم

1-الدالة g : أ) متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ب) متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جـ) ليست رتيبة على $\mathbb{R}$

2-C_g يقبل نقطة انعطاف احداثياها :

أ) $(-1;0)$ ب) $(0;4)$ جـ) $(0;0)$

الحل

اختيار الإجابة الصحيحة مع التعليل

1-باقي قسمة 203− على 5 هو 2 لأن

$$-203=5(-41)+2$$

ومنه

$$-203\equiv 2[5]$$

الإجابة الصحيحة هي ب

2-$x\equiv 5[7]$

$$2x\equiv 10[7]$$
$$2x+5\equiv 15[7]$$
$$2x+5\equiv 1[7]$$

الإجابة الصحيحة هي ب

2-1-

$$g(x)=x^3+3x+4$$
$$g'(x)=3x^2+3>0$$

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

الإجابة الصحيحة هي أ

2-ب-(C_g) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها هي:

ب-$(0,4)$ لأن

لدينا

$$g''(x)=6x$$
$$g''(0)=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	−	0	+

بما أن المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها فإن (C_g) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $(0,4)$ و $g(0)=4$

أي الإجابة الصحيحة هي ب

23. بكالوريا 2009 -الموضوع الثاني

1-ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9

2-عين باقي القسمة الاقليدية للعدد:

$(1429^{2009}+2008^{1430})$ على 9

3-بين أن العدد A حيث :

$A=7^{3n}+7^{3n+1}+7^{3n+2}+6$ يقبل القسمة على 9 من اجل كل عدد طبيعي n

الحل

1-دراسة بواقي قسمة 7^n على 9

$n=0$ ، $7^0\equiv 1[9]$

$n=1$ ، $7^1\equiv 7[9]$

$n=2$ ، $7^2\equiv 4[9]$

$n=3$ ، $7^3\equiv 1[9]$

دور القسمة هو 3

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$7^n\equiv$	1	7	4	$\equiv[9]$

بواقي 7^n على 9 هي : 4,7,1 مهما كان $n\in\mathbb{N}$

2-تعين باقي القسمة الاقليدية لـ $(1429^{2009}+2008^{1430})$ على 9

$$1429\equiv 7[9]$$

هي

$$2009=(669\times 3)+2$$

أي من الشكل $2009=3k+2$

$$1429^{2009}\equiv 7^{2009}[9]$$
$$1429^{2009}\equiv 4[9]$$

الباقي هو 4

باقي 2008^{1430} على 9:

$$2008^{1430}\equiv 1^{1430}[9]$$
$$2008^{1430}\equiv 1[9]$$

الباقي هو 1

$$1429^{2009}+2008^{1430}\equiv (4+1)[9]$$
$$\equiv 5[9]$$

3-البرهان أن A يقبل القسمة على 9 من اجل كل $n\in\mathbb{N}$

$$A=7^{3n}+7^{3n+1}+7^{3n+2}+6$$

بوضع $n=k$ وباستعمال الجدول نجد :

$$A\equiv 1+7+4+6[9]$$
$$A\equiv 18[9]$$
$$A\equiv 0[9]$$

ومنه A يقبل القسمة على 9

24. بكالوريا 2009 الموضوع الأول

ليكن العدد الطبيعي $a = 25$

1-أ-تحقق أن : $a \equiv 1[3]$

1-ب-استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد $2a^2 + 4$ على 3

1-ج-بين أن : $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

2-أ-ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 5^n على 3

2-ب-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $5^n + a^2 \equiv 0[3]$

الحل

1-أ-التحقق أن $a \equiv 1[3]$

لأن $25 = 3 \times 8 + 1$

ومنه $a \equiv 1[3]$

1-ب-استنتاج باقي $2a^2 + 4$ على 3

لدينا : $a \equiv 1[3]$

$2a^2 + 4 \equiv 2(1)^2 + 4[3]$

$\equiv 6[3]$

$\equiv 0[3]$

لأن $2a^2 + 4 \equiv 0[3]$

1-ج-البرهان أن $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

لدينا $a \equiv 1[3]$

$a^{360} \equiv 1^{360}[3]$

$a^{360} \equiv 1[3]$

$a^{360} - 5 \equiv 1 - 5[3]$

$\equiv -4[3]$

$a^{360} - 5 \equiv -4 + 6[3]$

ومنه $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

2-أ-الدارسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 3

25	3
1	8

$n = 0$ $5^0 \equiv 1[3]$

$n = 1$ $5^1 \equiv 2[3]$

$n = 2$ $5^2 \equiv 25[3]$

$5^2 \equiv 1[3]$

دور القسمة 2

n	$2k+0$	$2k+1$	
5^n	1	2	$\equiv[3]$

البواقي هي $\{1,2\}$

2-ب-تعيين العدد الطبيعي n حيث $5^n + a^2 \equiv 0[3]$

$a^2 \equiv 1^2[3]$

$a^2 \equiv 1[3]$

n	$2k+0$	$2k+1$	
5^n	1	2	$\equiv[3]$
a^2	1	1	$\equiv[3]$
$5^n + a^2$	2	"0"	$\equiv[3]$

ومنه $n = 2k + 1$ مع $k \in N$

25. بكالوريا 2008 الموضوع الأول

a و b عددان طبيعيان حيث $b = 2006$ ، $a = 1428$

1-أ- عين باقي القسمة الاقليدية للعدد a على 9

1-ب-بين أن : $b \equiv -1[9]$

1-جـ- هل العددان a و b متوافقان بترديد 9 ؟ برر اجابتك

2-أ-ماهو باقي قسمة العدد $(a + b^2)$ على 9 ؟

2-ب-استنتج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3

الحل

1-أ-تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد a على 9

$a \equiv 6[9]$

ومنه باقي a على 9 هو 6

1-ب-البرهان أن $b \equiv -1[9]$

لدينا

$b \equiv 2006[9]$

$b \equiv 8[9]$

$b \equiv 8 - 9[9]$

ومنه $b \equiv -1[9]$

1-جـ- معرفة ان كان العددان a و b متوافقان بترديد 9:

لدينا $a \equiv 6[9]$

$b \equiv 8[9]$

a و b ليس متوافقان بترديد لأن ليس لهما نفس الباقي.

2-أ-باقي قسمة $(a + b^2)$ على 9

لدينا : $a \equiv 6[9]$

$b^2 \equiv (-1)^2[9]$

$b^2 \equiv 1[9]$

$a + b^2 \equiv 6 + 1[9]$

$a + b^2 \equiv 7[9]$

ومنه الباقي هو 7

ط2-

$a + b^2 \equiv 6 + 8^2[9]$

$a + b^2 \equiv 6 + 64\,[9]$

$70 \equiv 7[9]$

$a + b^2 \equiv 7[9]$

2-ب-استنتاج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3

$a + b^2 \equiv 7[9]$

$a + b^2 \equiv 1[3]$

$7 \equiv 1[3]$

ومنه باقي قسمة $a + b^2$ على 3 هو 1

24. بكالوريا 2009 الموضوع الأول

ليكن العدد الطبيعي $a = 25$

1-أ-تحقق أن : $a \equiv 1[3]$

1-ب-استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد $2a^2 + 4$ على 3

1-جـ-بين أن : $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

2-أ-ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 5^n على 3

2-ب-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $5^n + a^2 \equiv 0[3]$

الحل

1-أ-التحقق أن $a \equiv 1[3]$

لأن $25 = 3 \times 8 + 1$

ومنه $a \equiv 1[3]$

1-ب-استنتاج باقي $2a^2 + 4$ على 3

لدينا : $a \equiv 1[3]$

$$2a^2 + 4 \equiv 2(1)^2 + 4[3]$$
$$\equiv 6[3]$$
$$\equiv 0[3]$$

لأن $2a^2 + 4 \equiv 0[3]$

1-جـ-البرهان أن $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

لدينا $a \equiv 1[3]$

$$a^{360} \equiv 1^{360}[3]$$
$$a^{360} \equiv 1[3]$$
$$a^{360} - 5 \equiv 1 - 5[3]$$
$$\equiv -4[3]$$
$$a^{360} - 5 \equiv -4 + 6[3]$$

ومنه $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

2-أ-الدارسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 3

25	3
1	8

$5^0 \equiv 1[3]$ $n = 0$

$5^1 \equiv 2[3]$ $n = 1$

$5^2 \equiv 25[3]$ $n = 2$

$5^2 \equiv 1[3]$

دور القسمة 2

n	$2k+0$	$2k+1$	
5^n	1	2	$\equiv[3]$

البواقي هي $\{1,2\}$

2-ب- تعيين العدد الطبيعي n حيث $5^n + a^2 \equiv 0[3]$

$$a^2 \equiv 1^2[3]$$
$$a^2 \equiv 1[3]$$

n	$2k+0$	$2k+1$	
5^n	1	2	$\equiv[3]$
a^2	1	1	$\equiv[3]$
$5^n + a^2$	2	"0"	$\equiv[3]$

ومنه $n = 2k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$

25. بكالوريا 2008 الموضوع الأول

a و b عددان طبيعيان حيث $b = 2006$ ، $a = 1428$

1-أ- عين باقي القسمة الاقليدية للعدد a على 9

1-ب-بين أن : $b \equiv -1[9]$

1-جـ- هل العددان a و b متوافقان بترديد 9 ؟ برر اجابتك

2-أ-ماهو باقي قسمة العدد $(a + b^2)$ على 9 ؟

2-ب-استنتج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3

الحل

1-أ-تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد a على 9

$$a \equiv 6[9]$$

ومنه باقي a على 9 هو 6

1-ب-البرهان أن $b \equiv -1[9]$

لدينا $b \equiv 2006[9]$

$b \equiv 8[9]$

$b \equiv 8 - 9[9]$

ومنه $b \equiv -1[9]$

1-جـ- معرفة ان كان العددان a و b متوافقان بترديد 9

لدينا $a \equiv 6[9]$

$b \equiv 8[9]$

a و b ليس متوافقان بترديد لأن ليس لهما نفس الباقي.

2-أ-باقي قسمة $(a + b^2)$ على 9

لدينا : $a \equiv 6[9]$

$$b^2 \equiv (-1)^2[9]$$
$$b^2 \equiv 1[9]$$
$$a + b^2 \equiv 6 + 1[9]$$
$$a + b^2 \equiv 7[9]$$

ومنه الباقي هو 7

ط-2

$$a + b^2 \equiv 6 + 8^2[9]$$
$$a + b^2 \equiv 6 + 64\ [9]$$
$$70 \equiv 7[9]$$
$$a + b^2 \equiv 7[9]$$

2-ب-استنتاج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3

$$a + b^2 \equiv 7[9]$$
$$a + b^2 \equiv 1[3]$$
$$7 \equiv 1[3]$$

ومنه باقي قسمة $a + b^2$ على 3 هو 1

26. بكالوريا 2008 الموضوع الثاني

1-احسب باقي قسمة كل من 3^2 ، 3^3 ، 3^4 ، 3^5 ، 3^6 على 7

2-عين باقي قسمة كل من : 3^{6n} و 3^{6n+4} على 7 حيث n عدد طبيعي غير معدوم

استنتج باقي قسمة 3^{2008} على 7

3-بين أن العدد: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4$ يقبل القسمة على 7 من اجل كل عدد طبيعي n

الحل

1-حساب باقي قسمة كل من :

$$3^0 \equiv 1[7]$$
$$3^1 \equiv 3[7]$$
$$3^2 \equiv 9[7]$$
$$\equiv 2[7]$$
$$3^3 \equiv 6[7]$$
$$3^4 \equiv 4[7]$$
$$3^5 \equiv 5[7]$$
$$3^6 \equiv 1[7]$$

الدور هو 6

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
3^n	1	3	2	6	4	5	$\equiv[7]$

البواقي هي: 2 ,6 ,4 ,5 ,3 ,1

2-تعيين باقي 3^{6n} على 7

من الجدول $3^{6k} \equiv 1[7]$ الباقي هو 1

$$3^{6n+4} \equiv 4[7]$$

باقي 3^{2008} على 7

نقسم على الدور ← 2008

$$3 \equiv 3[7]$$

2008	6
20	334
28	
4	

$$2008 = 334 \times 6 + 4$$

من الشكل $6k + 4$

$$3^{2008} \equiv 4[7]$$

الباقي هو 4

3-البرهان أن : $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4 \equiv 0[7]$

باستعمال الجدول نجد : $3 \times 4 - 2 \times 1 + 4 = 12 - 2 + 4$

$$= 14$$

$14 \equiv 0[7]$ ومنه العدد يقبل القسمة على 7

التعريف بالسلاسل

- **السلسلة الأرجوانية:** تحوي ملخصات شاملة بطريقة سلسة وفعّالة ؛ من أجل الحصول على علامات ممتازة في الامتحان
- **السلسلة الخضراء:** تحوي منهجية الاجابة وفق المنهاج ،حلول جميع مواضيع البكالوريا ، مواضيع مقترحة وأسئلة متوقعة وتعتبر هذه الطريقة من أكثر الطرق نجاعة من أجل التحضير الجيد للامتحان.
- **السلسلة الفضية:** تحوي السلسلة الأرجوانية والخضراء بالإضافة إلى مواضيع مقترحة، وتعتبر سلسلة شاملة تغني الكثير
- **سلسلة الطالب المتفوق:** هي سلسلة تعطي للطالب المتفوق على المستوى الوطني فرصة نقل خبرته وتجربته على شكل كتاب تحت إشراف فريق عكاشة، لكي يستفيد منه كل تلاميذ الوطن، وهو أحد ثمار مشروع عكاشة للطالب المتفوق، كن من المتفوقين وانظم إلى مشروع عكاشة للطالب المتفوقين.

أهم المراجع للشعب الأدبية

الرياضيات	• السلسلة الفضية – الرياضيات من الألف إلى الياء – الاستاذ نور الدين
العلوم الشرعية	• السلسلة الأرجوانية- الشريعة الاسلامية – الاستاذة بوسعادي نوال • السلسلة الخضراء- الشريعة الاسلامية- الاستاذة بوسعادي نوال • ملحق مارس للسلسلة الأرجوانية - الاستاذة بوسعادي نوال - يصدر قريبا جدا
التاريخ والجغرافيا	• السلسلة الأرجوانية - التاريخ والجغرافيا- الأستاذ بورنان عمار • السلسلة الخضراء - التاريخ والجغرافيا - الأستاذ بورنان عمار • أصغر وأنجع ملخص في التاريخ والجغرافيا - الأستاذ بورنان عمار- يصدر قريبا جدا
الأدب العربي	• السلسلة الفضية – الأدب العربي من الألف إلى الياء - يصدر قريبا جدا -
الإنجليزية	• السلسلة الفضية – الإنجليزية من الألف إلى الياء - يصدر قريبا جدا -
الفلسفة	• السلسلة الفضية – الفلسفة من الألف إلى الياء- يصدر قريبا جدا -
الفرنسية	• السلسلة الفضية – الفرنسية من الألف إلى الياء
القصة التحفيزية	• كتاب القصص التحفيزية لطلاب البكالوريا الطبعة الأولى- يصدر قريبا جدا-

المسابقات الخاصة بطلاب البكالوريا: - جوائز قيمة في انتظارك -

- مسابقة عكاشة للقصة التحفيزية لطلاب البكالوريا في صيف كل سنة .وكتاب الطبعة الاولى سيصدر قريبا ان شاء الله
- مسابقة أفضل معدل في الفصل: الفصل 01- الفصل 02- الفصل 03 -بعد نهاية كل فصل.

فريق عكاشة في خدمة العلم دوما

قناة الأستاذ نور الدين
أكبر قناة في الرياضيات
خاصة بطلاب البكالوريا

التحضير الجيد لبكالوريا الجزائر

فريق عكاشة في خدمة العلم دوما

FB: okacha bookstore مكتبة عكاشة
Okacka.bookstore@gmail.com
03 Rue de Stade Ouled Fayet-Alger-Algérie
Tel: 05 40 87 38 02 / 06 72 38 82 02 / 05 60 42 09 93
03 شارع الملعب أولاد فايت الجزائر العاصمة

عكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

ISBN:978-9931-723-85-1
A-1034
9 789931 723851

باك 2021 عنواننا للنجاح
BAC 2021